Анизотропный вклад спин-орбитальных взаимодействий в проводимость двумерного проводника

Олег Шалаев   Daniel Loss

Department of Physics and Astronomy, University of Basel, Switzerland

4 июля 2008 г.

UNI BASEL

План доклада

Влияние спин-орбитальных взаимодействий на проводимость.

Разложение по петлям: иерархия диаграмм

Подробности вычислений

Проводимость бесконечной двумерной системы

Проводимость бесконечной квази-одномерной системы

Генерирование и вычисление диаграмм на компьютере

План доклада

Влияние спин-орбитальных взаимодействий на проводимость.

Разложение по петлям: иерархия диаграмм

Подробности вычислений

Проводимость бесконечной двумерной системы

Проводимость бесконечной квази-одномерной системы

Генерирование и вычисление диаграмм на компьютере

Влияние спин-орбитальных взаимодействий (СОВ) на проводимость

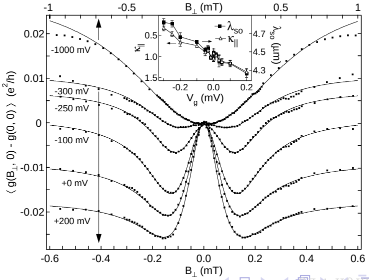
Переход между слабой локализацией и антилокализацией [Skvortsov '98]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_s + U(\vec{r}), \quad V_s = a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x).$$

- Локализация при малых СОВ $x < x_*$.
- Антилокализация при больших СОВ $x > x_*$.

$$x = 2p_{\mathrm{F}} a\tau/\hbar, \quad x_* = (l/L_\varphi)^{1/3} \ll 1.$$

Эксперимент [Zumbühl et al. '02]:



Влияние спин-орбитальных взаимодействий (СОВ) на проводимость

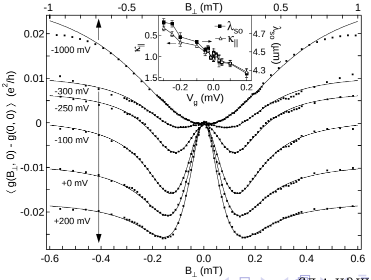
Переход между слабой локализацией и антилокализацией [Skvortsov '98]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_s + U(\vec{r}), \quad V_s = a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x).$$

- Локализация при малых СОВ $x < x_*$.
- Антилокализация при больших СОВ $x > x_*$.

$$x = 2p_F a\tau/\hbar, \quad x_* = (l/L_\varphi)^{1/3} \ll 1.$$

Эксперимент [Zumbühl et al. '02]:



Гамильтониан: спин-орбитальное взаимодействие и беспорядок

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_s + U(\vec{r}\,), \quad V_s = a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x) + b(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 \hat{p}_y).$$

Примеси создают случайный потенциал:

$$\overline{U(\vec{r}\,)U(\vec{r}\,')} = \hbar^3 (m\tau)^{-1} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,').$$

Относительная вероятность конкретной реализации потенциала беспорядка:

$$P[U] \sim \exp\left[-\frac{m\tau}{2}\int U^2(\vec{r}\,)\mathrm{d}r\right].$$

Усреднённая (по различным реализациям беспорядка) проводимость:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{h}\overline{\mathrm{Sp}\left[v_\alpha \hat{G}_{\mathrm{R}} v_\beta \hat{G}_{\mathrm{A}}\right]}, \quad \alpha, \beta = x, y,$$

$$v_\alpha = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, r_\alpha], \quad \hat{G}_{\mathrm{R}/A} = [E_{\mathrm{F}} - \hat{H} \pm i0]^{-1}.$$

Гамильтониан: спин-орбитальное взаимодействие и беспорядок

Rashba SOI term

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_s + U(\vec{r}), \quad V_s = a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x) + b(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 \hat{p}_y).$$

Примеси создают случайный потенциал:

$$\overline{U(\vec{r})U(\vec{r}\,')} = \hbar^3 (m\tau)^{-1} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,').$$

Относительная вероятность конкретной реализации потенциала беспорядка:

$$P[U] \sim \exp\left[-\frac{m\tau}{2} \int U^2(\vec{r})\mathrm{d}r\right].$$

Усреднённая (по различным реализациям беспорядка) проводимость:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{h} \overline{\mathrm{Sp}\left[v_\alpha \hat{G}_{\mathrm{R}} v_\beta \hat{G}_{\mathrm{A}}\right]}, \quad \alpha, \beta = x, y,$$

$$v_\alpha = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, r_\alpha], \quad \hat{G}_{\mathrm{R}/A} = [E_{\mathrm{F}} - \hat{H} \pm i0]^{-1}.$$

Гамильтониан: спин-орбитальное взаимодействие и беспорядок

Dresselhaus SOI term

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_s + U(\vec{r}), \quad V_s = a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x) + b(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 \hat{p}_y).$$

Примеси создают случайный потенциал:

$$\overline{U(\vec{r})U(\vec{r}\,')} = \hbar^3 (m\tau)^{-1} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,').$$

Относительная вероятность конкретной реализации потенциала беспорядка:

$$P[U] \sim \exp\left[-\frac{m\tau}{2} \int U^2(\vec{r}) \mathrm{d}r\right].$$

Усреднённая (по различным реализациям беспорядка) проводимость:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{h} \overline{\mathrm{Sp}\left[v_\alpha \hat{G}_{\mathrm{R}} v_\beta \hat{G}_{\mathrm{A}}\right]}, \quad \alpha, \beta = x, y,$$

$$v_\alpha = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, r_\alpha], \quad \hat{G}_{\mathrm{R}/A} = [E_{\mathrm{F}} - \hat{H} \pm i0]^{-1}.$$

Гамильтониан: спин-орбитальное взаимодействие и беспорядок

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_s + U(\vec{r}), \quad V_s = a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x) + b(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 \hat{p}_y).$$

Примеси создают случайный потенциал:

$$\overline{U(\vec{r})U(\vec{r}\,')} = \hbar^3 (m\tau)^{-1} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,').$$

Относительная вероятность конкретной реализации потенциала беспорядка:

$$P[U] \sim \exp\left[-\frac{m\tau}{2} \int U^2(\vec{r}) \mathrm{d}r\right].$$

Усреднённая (по различным реализациям беспорядка) проводимость:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{h} \overline{\mathrm{Sp}\left[v_\alpha \hat{G}_{\mathrm{R}} v_\beta \hat{G}_{\mathrm{A}}\right]}, \quad \alpha, \beta = x, y,$$

$$v_\alpha = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, r_\alpha], \quad \hat{G}_{\mathrm{R}/A} = [E_{\mathrm{F}} - \hat{H} \pm i0]^{-1}.$$

СОВ приводит к анизотропии энергетического спектра

Гамильтониан без учёта примесного потенциала

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x) + b(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 \hat{p}_y).$$

имеет анизотропный спектр:

$$E = \frac{p^2}{2m} \pm \frac{\Delta_{\vec{p}}}{2}, \quad \Delta_{\vec{p}} = 2\sqrt{p_x^2(a+b)^2 + p_y^2(a-b)^2}.$$

Мы ожидаем, что анизотропия спектра приведёт к анизотропии (средней) проводимости.

Симметрии (для двумерной системы):

- при $a = \pm b$: $s_x \pm s_y$ становится сохр. величиной, и проводимость не зависит от СОВ: $\sigma_{\alpha\beta}(a = \pm b) = \sigma_{\alpha\beta}(a = b = 0)$.
- σ_{xy} меняет знак одновременно с изменением знака ab.

читать больше

СОВ приводит к анизотропии энергетического спектра

Гамильтониан без учёта примесного потенциала

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x) + b(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 \hat{p}_y).$$

имеет анизотропный спектр:

$$E = \frac{p^2}{2m} \pm \frac{\Delta_{\vec{p}}}{2}, \quad \Delta_{\vec{p}} = 2\sqrt{p_x^2(a+b)^2 + p_y^2(a-b)^2}.$$

Мы ожидаем, что анизотропия спектра приведёт к анизотропии (средней) проводимости.

Симметрии (для двумерной системы):

- при $a = \pm b$: $s_x \pm s_y$ становится сохр. величиной, и проводимость не зависит от СОВ: $\sigma_{\alpha\beta}(a = \pm b) = \sigma_{\alpha\beta}(a = b = 0)$.
- σ_{xy} меняет знак одновременно с изменением знака ab.

читать больше

СОВ приводит к анизотропии энергетического спектра

Гамильтониан без учёта примесного потенциала

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x) + b(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 \hat{p}_y).$$

имеет анизотропный спектр:

$$E = \frac{p^2}{2m} \pm \frac{\Delta_{\vec{p}}}{2}, \quad \Delta_{\vec{p}} = 2\sqrt{p_x^2(a+b)^2 + p_y^2(a-b)^2}.$$

Мы ожидаем, что анизотропия спектра приведёт к анизотропии (средней) проводимости.

Симметрии (для двумерной системы):

- при $a = \pm b$: $s_x \pm s_y$ становится сохр. величиной, и проводимость не зависит от СОВ: $\sigma_{\alpha\beta}(a = \pm b) = \sigma_{\alpha\beta}(a = b = 0)$.
- σ_{xy} меняет знак одновременно с изменением знака ab.

читать больше

СОВ приводит к анизотропии энергетического спектра

Гамильтониан без учёта примесного потенциала

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + a(\sigma_1 \hat{p}_y - \sigma_2 \hat{p}_x) + b(\sigma_1 \hat{p}_x - \sigma_2 \hat{p}_y).$$

имеет анизотропный спектр:

$$E = \frac{p^2}{2m} \pm \frac{\Delta_{\vec{p}}}{2}, \quad \Delta_{\vec{p}} = 2\sqrt{p_x^2(a+b)^2 + p_y^2(a-b)^2}.$$

Мы ожидаем, что анизотропия спектра приведёт к анизотропии (средней) проводимости.

Симметрии (для двумерной системы):

- при $a = \pm b$: $s_x \pm s_y$ становится сохр. величиной, и проводимость не зависит от СОВ: $\sigma_{\alpha\beta}(a = \pm b) = \sigma_{\alpha\beta}(a = b = 0)$.
- σ_{xy} меняет знак одновременно с изменением знака ab.

читать больше

Параметры разложения

Анизотропная часть энергии

$$\Delta_{\vec{p}} = 2\sqrt{p_x^2(a+b)^2 + p_y^2(a-b)^2}$$

не раскладывается по a и b.

$\Longrightarrow$Следует выбрать другие параметры разложения.

Хорошие параметры разложения:

- Амплитуда СОВ $x = 2p_{\mathrm{F}}\tau\sqrt{a^2+b^2}/\hbar$.
- Анизотропия спектра $\delta = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

$$\text{соображения симметрии} \Longrightarrow \sigma_{xy} = \frac{e^2}{h}\sum_{m,n\geq 0} S_{mn}x^m\delta^{2n+1}.$$

Главный вклад $\propto S_{00}$:

$$\sigma_{xy} \approx \frac{e^2}{h}S_{00}\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

Параметры разложения

Анизотропная часть энергии

$$\Delta_{\vec{p}} = 2\sqrt{p_x^2(a+b)^2 + p_y^2(a-b)^2}$$

не раскладывается по a и b.

$\Longrightarrow$Следует выбрать другие параметры разложения.

Хорошие параметры разложения:

- Амплитуда СОВ $x = 2p_{\mathrm{F}}\tau\sqrt{a^2+b^2}/\hbar$.
- Анизотропия спектра $\delta = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

соображения симметрии $\Longrightarrow \sigma_{xy} = \dfrac{e^2}{h}\sum\limits_{m,n\geq 0} S_{mn}x^m\delta^{2n+1}$.

Главный вклад $\propto S_{00}$:

$$\sigma_{xy} \approx \frac{e^2}{h} S_{00} \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

Параметры разложения

Анизотропная часть энергии

$$\Delta_{\vec{p}} = 2\sqrt{p_x^2(a+b)^2 + p_y^2(a-b)^2}$$

не раскладывается по a и b.

$\Longrightarrow$ Следует выбрать другие параметры разложения.

Хорошие параметры разложения:

- Амплитуда СОВ $x = 2p_{\mathrm{F}}\tau\sqrt{a^2+b^2}/\hbar$.
- Анизотропия спектра $\delta = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

соображения симметрии $\Longrightarrow \sigma_{xy} = \dfrac{e^2}{h}\sum\limits_{m,n\geq 0} S_{mn}x^m\delta^{2n+1}$.

Главный вклад $\propto S_{00}$:

$$\sigma_{xy} \approx \frac{e^2}{h}S_{00}\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

План доклада

Влияние спин-орбитальных взаимодействий на проводимость.

Разложение по петлям: иерархия диаграмм

Подробности вычислений

Проводимость бесконечной двумерной системы

Проводимость бесконечной квази-одномерной системы

Генерирование и вычисление диаграмм на компьютере

Введём обозначения: куперoны и диффузоны

Усреднение произведения гриновских функций:

$$\overline{G_{\mathrm{R}} G_{\mathrm{R}}} = \overline{G_{\mathrm{R}}}\ \overline{G_{\mathrm{R}}}, \qquad \overline{G_{\mathrm{A}} G_{\mathrm{A}}} = \overline{G_{\mathrm{A}}}\ \overline{G_{\mathrm{A}}}.$$

$$\begin{aligned}
\overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r_1,\vec r_2)G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r_3,\vec r_4)} = {} & \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r_1,\vec r_2)}\cdot\overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r_3,\vec r_4)} \\
& + \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r_1,\vec r)}\ \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r\,',\vec r_2)}D_\omega(\vec r,\vec r\,')\overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r_3,\vec r\,')}\ \overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r,\vec r_4)} \\
& + \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r_1,\vec r)}\ \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r\,',\vec r_2)}C_\omega(\vec r,\vec r\,')\overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r_3,\vec r)}\ \overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r\,',\vec r_4)} \\
& + \text{малые поправки}
\end{aligned}$$

Введём обозначения: купероны и диффузоны

Усреднение произведения гриновских функций:

$$\overline{G_\mathrm{R} G_\mathrm{R}} = \overline{G_\mathrm{R}}\ \overline{G_\mathrm{R}}, \quad \overline{G_\mathrm{A} G_\mathrm{A}} = \overline{G_\mathrm{A}}\ \overline{G_\mathrm{A}}.$$

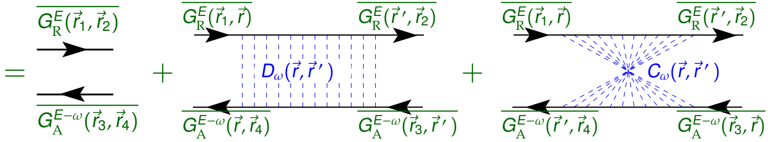
$$\begin{aligned}
\overline{G^E_\mathrm{R}(\vec r_1,\vec r_2) G^{E-\omega}_\mathrm{A}(\vec r_3,\vec r_4)} = & \overline{G^E_\mathrm{R}(\vec r_1,\vec r_2)} \cdot \overline{G^{E-\omega}_\mathrm{A}(\vec r_3,\vec r_4)} \\
& + \overline{G^E_\mathrm{R}(\vec r_1,\vec r)}\ \overline{G^E_\mathrm{R}(\vec r\,',\vec r_2)} D_\omega(\vec r,\vec r\,') \overline{G^{E-\omega}_\mathrm{A}(\vec r_3,\vec r\,')}\ \overline{G^{E-\omega}_\mathrm{A}(\vec r,\vec r_4)} \\
& + \overline{G^E_\mathrm{R}(\vec r_1,\vec r)}\ \overline{G^E_\mathrm{R}(\vec r\,',\vec r_2)} C_\omega(\vec r,\vec r\,') \overline{G^{E-\omega}_\mathrm{A}(\vec r_3,\vec r)}\ \overline{G^{E-\omega}_\mathrm{A}(\vec r\,',\vec r_4)} \\
& + \text{малые поправки}
\end{aligned}$$

Введём обозначения: купероны и диффузоны

Усреднение произведения гриновских функций:

$$\overline{G_{\mathrm{R}} G_{\mathrm{R}}} = \overline{G_{\mathrm{R}}}\ \overline{G_{\mathrm{R}}}, \quad \overline{G_{\mathrm{A}} G_{\mathrm{A}}} = \overline{G_{\mathrm{A}}}\ \overline{G_{\mathrm{A}}}.$$

$$\begin{aligned}
\overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r_1,\vec r_2) G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r_3,\vec r_4)} = & \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r_1,\vec r_2)} \cdot \overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r_3,\vec r_4)} \\
& + \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r_1,\vec r)}\ \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r\,',\vec r_2)} D_\omega(\vec r,\vec r\,') \overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r_3,\vec r\,')}\ \overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r,\vec r_4)} \\
& + \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r_1,\vec r)}\ \overline{G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec r\,',\vec r_2)} C_\omega(\vec r,\vec r\,') \overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r_3,\vec r)}\ \overline{G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec r\,',\vec r_4)} \\
& + \text{малые поправки}
\end{aligned}$$

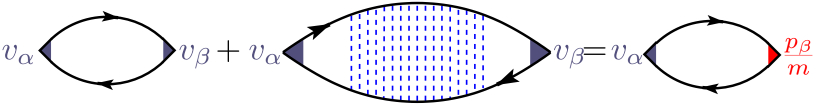


+малые поправки.

Вклады в среднюю проводимость

а) “Пузырь” и “вершинная поправка”

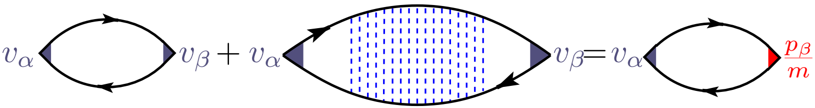
даёт главный (Друдэ) вклад в проводимость $\sim \sigma_D = \frac{e^2}{h}\frac{p_{\mathrm{F}} l}{2\hbar}$:



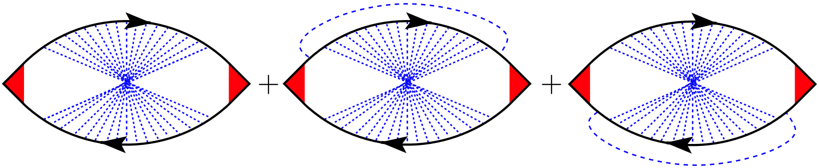
Вклады в среднюю проводимость

а) “Пузырь” и “вершинная поправка”

даёт главный (Друдэ) вклад в проводимость $\sim \sigma_D = \frac{e^2}{h}\frac{p_{\mathrm{F}} l}{2\hbar}$:



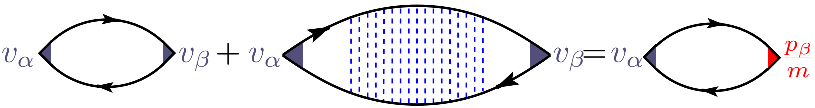
б) Слаболокализационная поправка даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{p_{\mathrm{F}} l/\hbar}$:



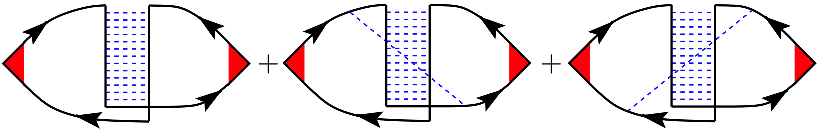
Вклады в среднюю проводимость

а) "Пузырь" и "вершинная поправка"

даёт главный (Друдэ) вклад в проводимость $\sim \sigma_D = \frac{e^2}{h}\frac{p_F l}{2\hbar}$:



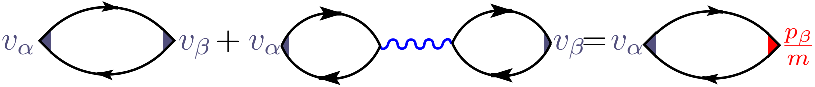
б) Слаболокализационная поправка даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{p_F l/\hbar}$:



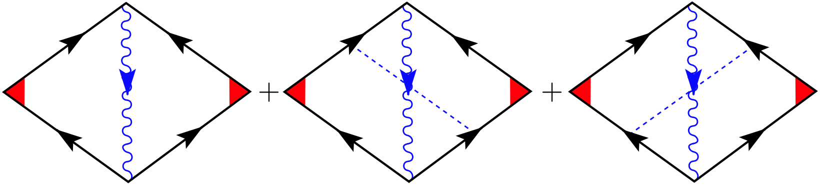
Вклады в среднюю проводимость

а) “Пузырь” и “вершинная поправка”

дaёт главный (Друдэ) вклад в проводимость $\sim \sigma_D = \frac{e^2}{h}\frac{p_{\mathrm{F}} l}{2\hbar}$:



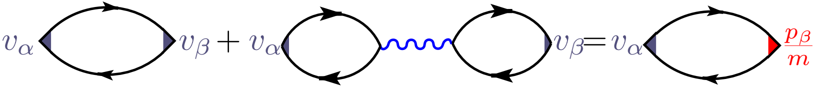
б) Слаболокализационная поправка даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{p_{\mathrm{F}} l/\hbar}$:



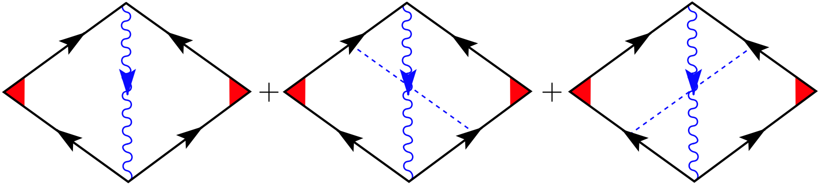
Вклады в среднюю проводимость

а) “Пузырь” и “вершинная поправка”

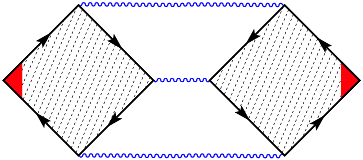
даёт главный (Друдэ) вклад в проводимость $\sim \sigma_D = \frac{e^2}{h}\frac{p_F l}{2\hbar}$:



б) Слаболокализационная поправка даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{p_F l/\hbar}$:



в) Наша диаграмма даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{(p_F l/\hbar)^2}$:



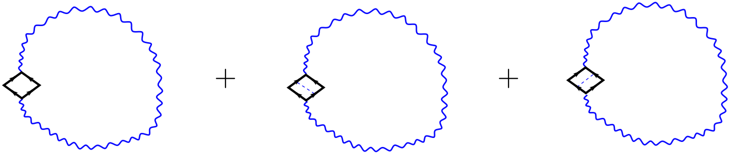
, and other 2 similar diagrams...

Вклады в среднюю проводимость

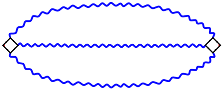
а) “Пузырь” и “вершинная поправка”

дaёт главный (Друдэ) вклад в проводимость $\sim \sigma_D = \frac{e^2}{h}\frac{p_{\mathrm{F}} l}{2\hbar}$:

б) Слаболокализационная поправка даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{p_{\mathrm{F}} l/\hbar}$:



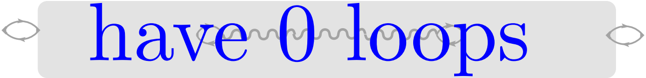
в) Наша диаграмма даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{(p_{\mathrm{F}} l/\hbar)^2}$:



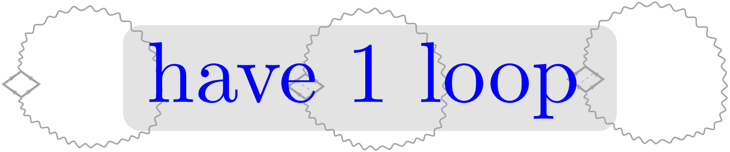
Вклады в среднюю проводимость

а) “Пузырь” и “вершинная поправка”

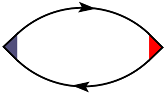
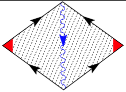
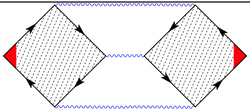
даёт главный (Друдэ) вклад в проводимость $\sim \sigma_D = \frac{e^2}{h}\frac{p_{\mathrm{F}} l}{2\hbar}$:



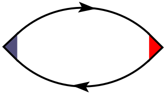
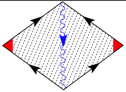
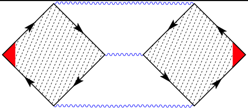
б) Слаболокализационная поправка даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{p_{\mathrm{F}} l/\hbar}$:



в) Наша диаграмма даёт вклад $\sim \frac{\sigma_D}{(p_{\mathrm{F}} l/\hbar)^2}$:

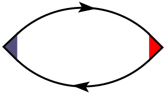
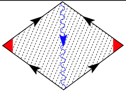
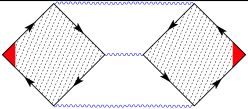
пример диаграммы	количество петель	относительная малость
	0 (ZLA)	1
	1 (WL)	$(p_\mathrm{F} l/\hbar)^{-1}$
	2	$(p_\mathrm{F} l/\hbar)^{-2}$

Каждая петля даёт малость $\sim (p_\mathrm{F} l/\hbar)^{-1} \ll 1$.

пример диаграммы	количество петель	относительная малость
	0 (ZLA)	1
	1 (WL)	$(p_{\mathrm{F}} l/\hbar)^{-1}$
	2	$(p_{\mathrm{F}} l/\hbar)^{-2}$

Каждая петля даёт малость $\sim (p_{\mathrm{F}} l/\hbar)^{-1} \ll 1$.

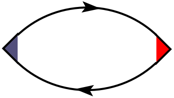
сл.: ZLA

пример диаграммы	количество петель	относительная малость
	0 (ZLA)	1
	1 (WL)	$(p_{\mathrm{F}} l/\hbar)^{-1}$
	2	$(p_{\mathrm{F}} l/\hbar)^{-2}$

Каждая петля даёт малость $\sim (p_{\mathrm{F}} l/\hbar)^{-1} \ll 1$.

сл.: ZLA

Вклад безпетлевых диаграмм

V_α  $\frac{p_\beta}{m} = \frac{e^2}{h}\frac{p_{\mathrm{F}} l/\hbar}{2}\left[1 + \frac{a^2+b^2}{v_{\mathrm{F}}^2}\right]\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

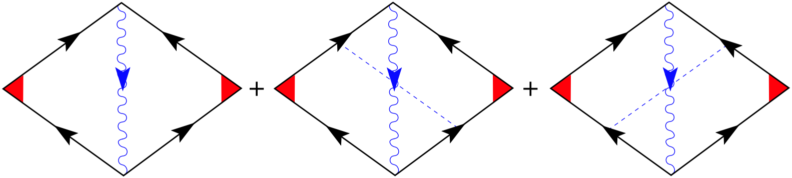
– почти (с точностью до множителя $= 4$) совпадает с результатом расчётов при помощи ур-ния Больцмана [Trushin & Schliemann '07].

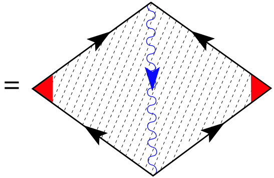
Этот результат неполон т.к. для $a = \pm b$ проводимость не может зависеть от СОВ.

вернуться на слайд с симметриями

Вклад диаграмм с одной петлёй

– пропорционален сумме диаг. эл-тов купероной матрицы:

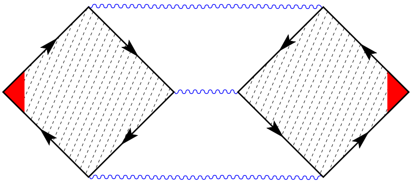


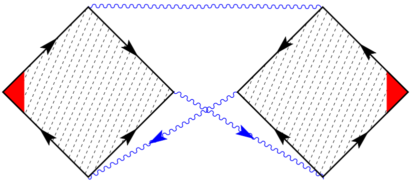
 $\propto C^{00} - C^{11} - C^{22} - C^{33}.$

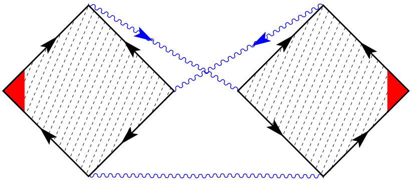
– изотропный вклад (при $\omega = 0$).

Наиболее важные двухпетлевые диаграммы

Только три диаграммы дают вклад в S_{00}:





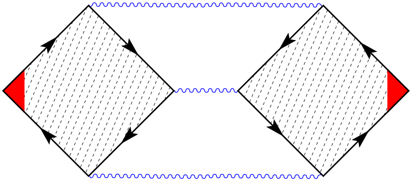


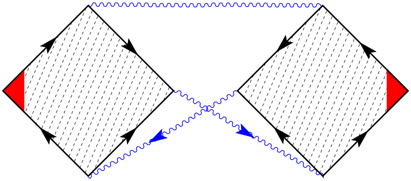
Каждая диаграмма расходится на малых диффузонных импульсах.

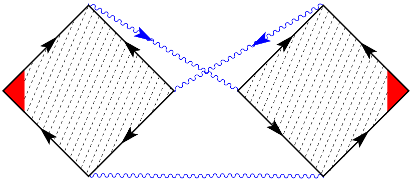
Расходимости взаимно компенсируются если не нарушена симметрия по отн. к обращению времени.

Наиболее важные двухпетлевые диаграммы

Только три диаграммы дают вклад в S_{00}:





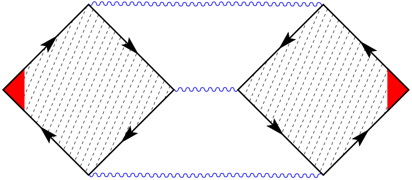


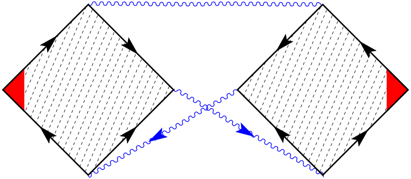
Каждая диаграмма расходится на малых диффузонных импульсах.

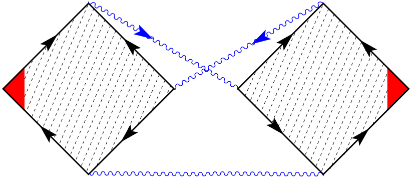
Расходимости взаимно компенсируются если не нарушена симметрия по отн. к обращению времени.

Наиболее важные двухпетлевые диаграммы

Только три диаграммы дают вклад в S_{00}:







Каждая диаграмма расходится на малых диффузонных импульсах.

Расходимости взаимно компенсируются если не нарушена симметрия по отн. к обращению времени.

План доклада

Влияние спин-орбитальных взаимодействий на проводимость.

Разложение по петлям: иерархия диаграмм

Подробности вычислений

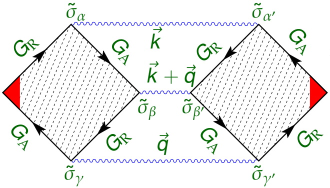
Проводимость бесконечной двумерной системы

Проводимость бесконечной квази-одномерной системы

Генерирование и вычисление диаграмм на компьютере

Этапы вычислений

Пример: рассмотрим одну диаграмму (из трёх):



$$= \int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{3} \sum_{\alpha',\beta',\gamma'=0}^{3} L_{\alpha\beta\gamma} D^{\alpha\alpha'}_{\vec k} D^{\beta'\beta}_{\vec k+\vec q} D^{\gamma\gamma'}_{\vec q} R_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

–ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ выражение, необходимо использование систем компьютерной алгебры.

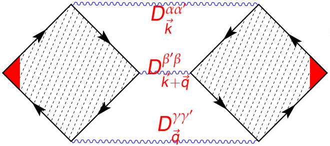
$$\int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k k}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi}$$

– считается аналитически и численно.

Посмотреть выражения для диффузонов и Хиками-боксов.

Этапы вычислений

Пример: рассмотрим одну диаграмму (из трёх):



$$= \int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{3} \sum_{\alpha',\beta',\gamma'=0}^{3} L_{\alpha\beta\gamma} \underbrace{D^{\alpha\alpha'}_{\vec{k}} D^{\beta'\beta}_{\vec{k}+\vec{q}} D^{\gamma\gamma'}_{\vec{q}}}_{\text{diffusons}} R_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

–ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ выражение, необходимо использование систем компьютерной алгебры.

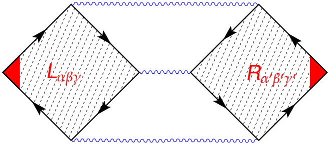
$$\int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k k}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi}$$

– считается аналитически и численно.

Посмотреть выражения для диффузонов и Хиками-боксов.

Этапы вычислений

Пример: рассмотрим одну диаграмму (из трёх):



$$= \int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{3} \sum_{\alpha',\beta',\gamma'=0}^{3} L_{\alpha\beta\gamma} D_{\vec{k}}^{\alpha\alpha'} D_{\vec{k}+\vec{q}}^{\beta'\beta} D_{\vec{q}}^{\gamma\gamma'} R_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

Hikami boxes

–ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ выражение, необходимо использование систем компьютерной алгебры.

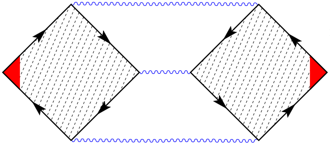
$$\int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k k}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi}$$

– считается аналитически и численно.

Посмотреть выражения для диффузонов и Хиками-боксов.

Этапы вычислений

Пример: рассмотрим одну диаграмму (из трёх):



$$= \int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{3} \sum_{\alpha',\beta',\gamma'=0}^{3} L_{\alpha\beta\gamma} D_{\vec{k}}^{\alpha\alpha'} D_{\vec{k}+\vec{q}}^{\beta'\beta} D_{\vec{q}}^{\gamma\gamma'} R_{\alpha'\beta'\gamma'}$$

–ОЧЕНЬ БОЛЬШОЕ выражение, необходимо использование систем компьютерной алгебры.

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}k k}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}q q}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{2\pi}$$

– считается аналитически и численно.

Посмотреть выражения для диффузонов и Хиками-боксов.

План доклада

Влияние спин-орбитальных взаимодействий на проводимость.

Разложение по петлям: иерархия диаграмм

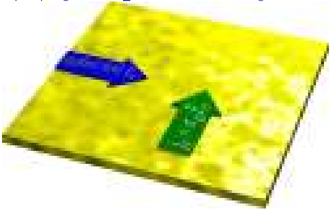
Подробности вычислений

Проводимость бесконечной двумерной системы

Проводимость бесконечной квази-одномерной системы

Генерирование и вычисление диаграмм на компьютере

Двумерный случай I



На нулевой частоте:

$$\sigma_{xy} = -5.6\times10^{-3}\,\frac{2ab}{a^2+b^2}\,\frac{e^2}{h}\,\frac{1}{p_{\mathrm{F}}l/\hbar}.$$

При беск. малом СОВ σ_{xy} может быть конечна!

Кликни сюда и увидишь, что то же самое происходит и для локализации.

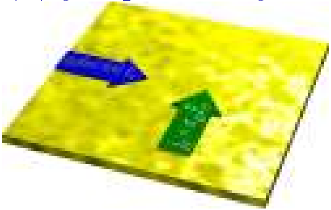
На больших частотах $\omega\tau \gg 4p_{\mathrm{F}}^2(a^2+b^2)\tau^2/\hbar^2$:

$$\sigma_{xy} = -0.25\cdot\frac{-2i\omega\tau\cdot 2x_a x_b}{(x_a^2+x_b^2-2i\omega\tau)^2}\,\frac{e^2}{h}\,\frac{1}{p_{\mathrm{F}}l/\hbar}.$$

where

$$x_a = 2p_{\mathrm{F}}a\tau/\hbar,\quad x_b = 2p_{\mathrm{F}}b\tau/\hbar,\quad 2x_a x_b \ll x_a^2+x_b^2 \ll \omega\tau \ll 1.$$

Двумерный случай I



На нулевой частоте:

$$\sigma_{xy} = -5.6\times 10^{-3}\frac{2ab}{a^2+b^2}\frac{e^2}{h}\frac{1}{p_{\mathrm{F}}l/\hbar}.$$

При беск. малом СОВ σ_{xy} может быть конечна!

Кликни сюда и увидишь, что то же самое происходит и для локализации.

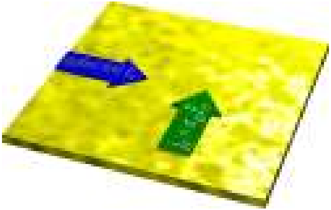
На больших частотах $\omega\tau \gg 4p_{\mathrm{F}}^2(a^2+b^2)\tau^2/\hbar^2$:

$$\sigma_{xy} = -0.25\cdot\frac{-2i\omega\tau\cdot 2x_a x_b}{(x_a^2+x_b^2-2i\omega\tau)^2}\frac{e^2}{h}\frac{1}{p_{\mathrm{F}}l/\hbar}.$$

where

$$x_a = 2p_{\mathrm{F}}a\tau/\hbar, \quad x_b = 2p_{\mathrm{F}}b\tau/\hbar, \quad 2x_a x_b \ll x_a^2+x_b^2 \ll \omega\tau \ll 1.$$

Двумерный случай II



Интерпретация – эффекты расфазировки:

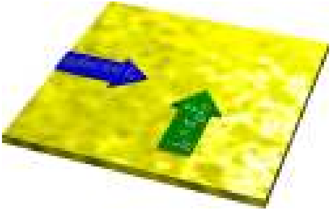
$$-i\omega\tau \longrightarrow \tau/\tau_\phi.$$

$$\sigma_{xy} = \begin{cases} 5.6\times 10^{-3}\cdot \dfrac{\tau_- - \tau_+}{\tau_- + \tau_+}\dfrac{e^2}{h}\dfrac{\hbar}{E_{\mathrm{F}}\tau}, & \tau_\pm \ll \tau_\phi, \\ 0.13\cdot\left(\dfrac{\tau_\phi}{\tau_+} - \dfrac{\tau_\phi}{\tau_-}\right)\dfrac{e^2}{h}\dfrac{\hbar}{E_{\mathrm{F}}\tau}, & \tau_\phi \ll \tau_\pm, \end{cases}$$

где времена спиновой релаксации $\tau_\pm$ равны
[Averkiev et al.'02]

$$2\tau/\tau_\pm = (x_a \mp x_b)^2.$$

Двумерный случай II



Интерпретация – эффекты расфазировки:

$$-i\omega\tau \longrightarrow \tau/\tau_\phi.$$

Estimate for $p_{\mathrm{F}} l/\hbar = 5$ $\Longrightarrow \sigma_{xy} = 5 \cdot 10^{-4} \sigma_D, \quad \tau_\pm \ll \tau_\phi,$

где времена спиновой релаксации $\tau_\pm$ равны [Averkiev et al.'02]

$$2\tau/\tau_\pm = (x_a \mp x_b)^2.$$

План доклада

Влияние спин-орбитальных взаимодействий на проводимость.

Разложение по петлям: иерархия диаграмм

Подробности вычислений

Проводимость бесконечной двумерной системы

Проводимость бесконечной квази-одномерной системы

Генерирование и вычисление диаграмм на компьютере

Квантовые интерференционные эффекты усиливаются при уменьшении размерности

Слаболокализационная поправка в разных размерностях:

$$\text{in 3D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{2\pi h}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{L_\phi}\right), \quad L_\phi = v_F \tau_\phi,$$

$$\text{in 2D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{\pi h}\log\frac{L_\phi}{l},$$

$$\text{in (quasi) 1D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{h}\frac{L_\phi}{L_\perp}, \quad L_\perp = \text{width of the strip.}$$

$\Longrightarrow$ Есть 2 способа увеличить эффект:

- Уменьшить размерность – с 2D в квази-1D.
- Нарушить симметрию обращения времени $\Longrightarrow$ в диаграммах появятся нескомпенсированные расходимости. вернуться к диаграммам

Квантовые интерференционные эффекты усиливаются при уменьшении размерности

Слаболокализационная поправка в разных размерностях:

$$\text{in 3D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{2\pi h}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{L_\phi}\right), \quad L_\phi = v_F \tau_\phi,$$

$$\text{in 2D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{\pi h}\log\frac{L_\phi}{l},$$

$$\text{in (quasi) 1D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{h}\frac{L_\phi}{L_\perp}, \quad L_\perp = \text{width of the strip.}$$

$\Longrightarrow$ Есть 2 способа увеличить эффект:

- Уменьшить размерность – с 2D в квази-1D.
- Нарушить симметрию обращения времени $\Longrightarrow$ в диаграммах появятся нескомпенсированные расходимости. вернуться к диаграммам

Квантовые интерференционные эффекты усиливаются при уменьшении размерности

Слаболокализационная поправка в разных размерностях:

$$\text{in 3D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{2\pi h}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{L_\phi}\right), \quad L_\phi = v_F \tau_\phi,$$

$$\text{in 2D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{\pi h} \log \frac{L_\phi}{l},$$

$$\text{in (quasi) 1D} \quad \Delta\sigma_{\mathrm{WL}} = -\frac{e^2}{h} \frac{L_\phi}{L_\perp}, \quad L_\perp = \text{width of the strip.}$$

$\Longrightarrow$ Есть 2 способа увеличить эффект:

- Уменьшить размерность – с 2D в квази-1D.
- Нарушить симметрию обращения времени $\Longrightarrow$ в диаграммах появятся нескомпенсированные расходимости. вернуться к диаграммам

Длинный квази-1D провод

Предполагаем, что $L_\perp \gg l$ но

$$E_{c\perp}\tau/\hbar \gg \tilde{x}^2 \equiv \max\left(x^2, l^2/L_\phi^2\right),$$

где $E_{c\perp} = D/L_\perp^2$ и $D = lv_{\mathrm{F}}/2$.

Диффузоны и купероны становятся одномерными:

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} \to \frac{1}{L_\perp^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_x}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}q_x}{(2\pi)^2},$$

$\Longrightarrow$ эффект становится в $l^2/(\tilde{x}L_\perp)^2 \gg 1$ раз больше:

in quasi – 1D for $x^2 \gg l/L_\phi$(in the rotated coordinate system)

$$\delta\sigma = \frac{e^2}{h}\frac{\hbar}{p_{\mathrm{F}} l}\frac{l^2}{x^2 L_\perp^2}\left[\begin{pmatrix} -0.39 & 0 \\ 0 & 6.7 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -852 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}\right].$$

– проводимость анизотропна

даже при изотропном спектре ($\delta = 0$).

Длинный квази-1D провод

Предполагаем, что $L_\perp \gg l$ но

$$E_{c\perp}\tau/\hbar \gg \tilde{x}^2 \equiv \max\left(x^2, l^2/L_\phi^2\right),$$

где $E_{c\perp} = D/L_\perp^2$ и $D = lv_{\mathrm{F}}/2$.

Диффузоны и купероны становятся одномерными:

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 k}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathrm{d}^2 q}{(2\pi)^2} \to \frac{1}{L_\perp^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_x}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}q_x}{(2\pi)^2},$$

$\Longrightarrow$ эффект становится в $l^2/(\tilde{x}L_\perp)^2 \gg 1$ раз больше:

$$\text{in quasi}-1\text{D for } x^2 \gg l/L_\phi (\text{in the rotated coordinate system})$$

$$\delta\sigma = \frac{e^2}{h}\frac{\hbar}{p_{\mathrm{F}} l}\frac{l^2}{x^2 L_\perp^2}\left[\begin{pmatrix} -0.39 & 0 \\ 0 & 6.7 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -852 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}\right].$$

– проводимость анизотропна
даже при изотропном спектре ($\delta = 0$).

План доклада

Влияние спин-орбитальных взаимодействий на проводимость.

Разложение по петлям: иерархия диаграмм

Подробности вычислений

Проводимость бесконечной двумерной системы

Проводимость бесконечной квази-одномерной системы

Генерирование и вычисление диаграмм на компьютере

Программа для генерирования диаграмм

Вышеизложенные результаты невозможно получить без использования систем компьютерной алгебры (maxima). Мы разработали программу, которая

- Генерирует все диаграммы с заданным количеством петель.
- Генерирует и автоматически считает Хиками-боксы.
- Считает интегралы по диффузонным и куперонным импульсам.
  (Это интегрирование неуниверсально – его надо программировать отдельно для разных задач.)
- Будет скоро опубликована...

См. http://theorie5.physik.unibas.ch/shalaev/diagrams.en.html

Выводы

- Тензор проводимости становится анизотропным из-за одновременного действия СОВ Рашбы и Дрессельхауса (2D).
- Квантовый эффект, который был пропущен при расчётах с помощью ур. Больцмана.
- Зависимость σ_{xy} от амплитуды СОВ сингулярна при $\omega = 0$ и $L_\phi = \infty$.
- Эффект больше в квази-1D геометрии (где достаточно и одного типа СОВ).
- Манипулирование диаграммами и их выражениями необходимо проводить с помощью системы компьютерной алгебры. (Смешанный аналитико-численный подход.)

Выводы

- Тензор проводимости становится анизотропным из-за одновременного действия СОВ Рашбы и Дрессельхауса (2D).
- Квантовый эффект, который был пропущен при расчётах с помощью ур. Больцмана.
- Зависимость σ_{xy} от амплитуды СОВ сингулярна при $\omega = 0$ и $L_\phi = \infty$.
- Эффект больше в квази-1D геометрии (где достаточно и одного типа СОВ).
- Манипулирование диаграммами и их выражениями необходимо проводить с помощью системы компьютерной алгебры. (Смешанный аналитико-численный подход.)

Выводы

- Тензор проводимости становится анизотропным из-за одновременного действия СОВ Рашбы и Дрессельхауса (2D).
- Квантовый эффект, который был пропущен при расчётах с помощью ур. Больцмана.
- Зависимость σ_{xy} от амплитуды СОВ сингулярна при $\omega = 0$ и $L_\phi = \infty$.
- Эффект больше в квази-1D геометрии (где достаточно и одного типа СОВ).
- Манипулирование диаграммами и их выражениями необходимо проводить с помощью системы компьютерной алгебры. (Смешанный аналитико-численный подход.)

Выводы

- Тензор проводимости становится анизотропным из-за одновременного действия СОВ Рашбы и Дрессельхауса (2D).
- Квантовый эффект, который был пропущен при расчётах с помощью ур. Больцмана.
- Зависимость σ_{xy} от амплитуды СОВ сингулярна при $\omega = 0$ и $L_\phi = \infty$.
- Эффект больше в квази-1D геометрии (где достаточно и одного типа СОВ).
- Манипулирование диаграммами и их выражениями необходимо проводить с помощью системы компьютерной алгебры. (Смешанный аналитико-численный подход.)

Выводы

- Тензор проводимости становится анизотропным из-за одновременного действия СОВ Рашбы и Дрессельхауса (2D).
- Квантовый эффект, который был пропущен при расчётах с помощью ур. Больцмана.
- Зависимость σ_{xy} от амплитуды СОВ сингулярна при $\omega = 0$ и $L_\phi = \infty$.
- Эффект больше в квази-1D геометрии (где достаточно и одного типа СОВ).
- Манипулирование диаграммами и их выражениями необходимо проводить с помощью системы компьютерной алгебры. (Смешанный аналитико-численный подход.)

Выводы

- Тензор проводимости становится анизотропным из-за одновременного действия СОВ Рашбы и Дрессельхауса (2D).
- Квантовый эффект, который был пропущен при расчётах с помощью ур. Больцмана.
- Зависимость σ_{xy} от амплитуды СОВ сингулярна при $\omega = 0$ и $L_\phi = \infty$.
- Эффект больше в квази-1D геометрии (где достаточно и одного типа СОВ).
- Манипулирование диаграммами и их выражениями необходимо проводить с помощью системы компьютерной алгебры. (Смешанный аналитико-численный подход.)

Список литературы I

A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov, I. E. Dzyaloshinskii,
Methods of quantum field theory in statistical physics
Dobrosvet (Moscow), 1998.

Oleg Chalaev and Daniel Loss
Phys. Rev. B 77, 115352 (2008).

D. M. Zumbühl, J. B. Miller, C. M. Marcus, K. Campman, and A. C. Gossard,
Phys. Rev. Lett. 89, 276803 (2002).

P. Schwab and R. Raimondi,
Eur. Phys. J. B 25, 483 (2002).

M. Trushin and J. Schliemann,
Phys. Rev. B 75, 155323 (2007).

Список литературы II

D. Vollhardt and P. Wölfle
Phys. Rev. B, 22, 4666 (1980).

N. S. Averkiev, L. E. Golub, M. Willander,
J. Phys.: Condens. Matter 14, R271 (2002).

M. A. Skvortsov,
JETP Lett. 67, 133 (1998).

The case $a = b$

In the rotated coordinate system:

$$a = b \Rightarrow U_1 \hat{H} U_1^\dagger = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\hat{p}_x}{m} - 2b\sigma_3\right)^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{m^2}\right] + U(\vec{r}),$$

$$U_1 \hat{\vec{v}} U_1^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}_x}{m} - 2b\sigma_3 \\ \frac{\hat{p}_y}{m} \end{pmatrix}, \quad U_1 = (U_1^\dagger)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -e^{i\pi/4} \\ 1 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

$$\operatorname*{Sp}_{\vec{p}} \operatorname*{Sp}_{\text{spin}} \left[\hat{v}_x \hat{G}_{\mathrm{R}} \hat{v}_x \hat{G}_{\mathrm{A}}\right] = \operatorname*{Sp}_{\vec{p}} \operatorname*{Sp}_{\text{spin}} \left[U_1 \hat{v}_x U_1^\dagger U_1 \hat{G}_{\mathrm{R}} U_1^\dagger U_1 \hat{v}_x U_1^\dagger U_1 \hat{G}_{\mathrm{A}} U_1^\dagger\right] =$$

$$= \operatorname*{Sp}_{\vec{p}} \left\{ [\hat{p}_x \hat{g}_{\mathrm{r}} \hat{p}_x \hat{g}_{\mathrm{a}}]\Big|_{p_x \to p_x - 2ma} + [\hat{p}_x \hat{g}_{\mathrm{r}} \hat{p}_x \hat{g}_{\mathrm{a}}]\Big|_{p_x \to p_x + 2ma} \right\} = 2 \operatorname*{Sp}_{\vec{p}} [\hat{p}_x \hat{g}_{\mathrm{r}} \hat{p}_x \hat{g}_{\mathrm{a}}]$$

Conclusion:

$$a = \pm b \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xx}(a = b = 0).$$

Cooperon is identical to the diffuson in a system with time reversal I

$$\tilde{X}_D^{\alpha\beta}(\vec{q}\,) = \frac{\hbar}{4\pi\nu\tau}\int\frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Sp}[\sigma_\alpha G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec{p}\,)\sigma_\beta G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec{p}-\vec{q}\,)],$$

$$\bar{X}_C^{\alpha\beta}(\vec{q}\,) = \frac{\hbar}{4\pi\nu\tau}\int\frac{\mathrm{d}^2p}{(2\pi)^2}\,\mathrm{Sp}\left\{\bar{\sigma}_\alpha G_{\mathrm{R}}^{E}(\vec{p}\,)\bar{\sigma}_\beta^{\dagger}[G_{\mathrm{A}}^{E-\omega}(\vec{q}-\vec{p}\,)]^{T}\right\}.$$

The cooperon and diffuson:

$$D_{\vec{q}}^{\alpha\beta} = \frac{\hbar}{4\pi\nu\tau}\left[E_4 - \tilde{X}_D(\vec{q}\,)\right]^{-1}_{\alpha\beta}, \quad C_{\vec{q}}^{\alpha\beta} = \frac{\hbar}{4\pi\nu\tau}\left[E_4 - \bar{X}_C(\vec{q}\,)\right]^{-1}_{\alpha\beta},$$

Time-reversal symmetry $\Longrightarrow \sigma_2 G_{\mathrm{A}}^{T}(-\vec{p}\,)\sigma_2 = G_{\mathrm{A}}(\vec{p}\,)$, so that $\bar{X}_C^{\alpha\beta}(\vec{q}\,) = \tilde{X}_D^{\alpha\beta}(\vec{q}\,)$, and $C_{\vec{q}}^{\alpha\beta} = D_{\vec{q}}^{\alpha\beta}$.

Cooperon is identical to the diffuson in a system with time reversal II

Dimensionless momentum: $\vec{Q} \stackrel{\mathrm{df}}{=} l\vec{q}/x\hbar$.

$$\frac{E_3 - X_D}{x^2} \approx \frac{Q^2}{2} E_3 + Y^{(0)} - \left[x^2 Y^{(0,2)} + \delta Y^{(1,0)} + \delta \cdot x^2 Y^{(1,2)}\right],$$

$$Y^{(0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2iQ_x \\ 0 & 1 & -2iQ_y \\ 2iQ_x & 2iQ_y & 2 \end{pmatrix}, \quad Y^{(1,0)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & iQ_x \\ 0 & 1 & -iQ_y \\ -iQ_x & iQ_y & 0 \end{pmatrix},$$

The zeroth-order diffuson:

$$D^{(0,0)}_{\vec{Q}} \propto \begin{pmatrix} \frac{1+Q_x^2}{1+Q^2} + Q_x^2 \frac{2-Q^2}{2-Q^2+Q^4} & \frac{Q_x Q_y}{1+Q^2} + Q_x Q_y \frac{2-Q^2}{2-Q^2+Q^4} & \frac{2iQ_x}{2-Q^2+Q^4} \\ \frac{Q_x Q_y}{1+Q^2} + Q_x Q_y \frac{2-Q^2}{2-Q^2+Q^4} & \frac{1+Q_y^2}{1+Q^2} + Q_y^2 \frac{2-Q^2}{2-Q^2+Q^4} & \frac{2iQ_y}{2-Q^2+Q^4} \\ -\frac{2iQ_x}{2-Q^2+Q^4} & -\frac{2iQ_y}{2-Q^2+Q^4} & \frac{1+Q^2}{2-Q^2+Q^4} \end{pmatrix}.$$

Expressions for Hikami boxes I

α	0	0	1	1	2	2	3	3
β	1	3	1	3	1	3	1	3
γ	3	1	2	0	1	3	0	2
$\frac{L^x_{\alpha\beta\gamma}\hbar^3}{4\pi\nu v_{\mathrm{F}}\tau^3(x_a+x_b)}$	-1	1	i	1	$-i$	$-i$	-1	i
$\frac{R^x_{\alpha\beta\gamma}\hbar^3}{4\pi\nu v_{\mathrm{F}}\tau^3(x_a+x_b)}$	1	-1	$-i$	-1	i	i	1	$-i$

α	0	0	1	1	2	2	3	3
β	2	3	2	3	2	3	2	3
γ	3	2	2	3	1	0	0	1
$\frac{L^y_{\alpha\beta\gamma}\hbar^3}{4\pi\nu v_{\mathrm{F}}\tau^3(x_a-x_b)}$	-1	1	i	i	$-i$	1	-1	$-i$
$\frac{R^y_{\alpha\beta\gamma}\hbar^3}{4\pi\nu v_{\mathrm{F}}\tau^3(x_a-x_b)}$	1	-1	$-i$	$-i$	i	-1	1	i

Таблица: Non-zero elements of GFB [first order in (x_a, x_b)] of the 1st diagram for $q = k = 0$.

Expressions for Hikami boxes II

The divergent contributions of 3 diagrams mutually cancel:

α	0	0	1	1	2	2	3	3
β	1	3	1	3	1	3	1	3
γ	3	1	2	0	1	3	0	2
$\frac{L^{x}_{\alpha\beta\gamma}\hbar^3}{4\pi\nu v_{\mathrm{F}}\tau^3(x_a+x_b)}$	-1	1	i	1	$-i$	$-i$	-1	i
$\frac{R^{x}_{\alpha\beta\gamma}\hbar^3}{4\pi\nu v_{\mathrm{F}}\tau^3(x_a+x_b)}$	0	0	$-2i$	0	$2i$	$2i$	0	$-2i$

α	0	0	1	1	2	2	3	3
β	2	3	2	3	2	3	2	3
γ	3	2	2	3	1	0	0	1
$\frac{L^{y}_{\alpha\beta\gamma}\hbar^3}{4\pi\nu v_{\mathrm{F}}\tau^3(x_a-x_b)}$	-1	1	i	i	$-i$	1	-1	$-i$
$\frac{R^{y}_{\alpha\beta\gamma}\hbar^3}{4\pi\nu v_{\mathrm{F}}\tau^3(x_a-x_b)}$	0	0	$-2i$	$-2i$	$2i$	0	0	$2i$

Таблица: Effective Hikami boxes produced by the sum of three diagrams.