

**Булаев Денис Викторович**

**МАГНИТНЫЙ И ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ ОТКЛИК  
НЕПЛОСКИХ НАНОСТРУКТУР**

Специальность 01.04.07 - физика конденсированного состояния

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических

наук, доцент В. А. Маргулис

**Саранск - 2003**

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Обозначения</b>	<b>16</b>
<b>Глава 1 Литературный обзор</b>	<b>17</b>
1.1 Сфероидальные наноструктуры . . . . .	17
1.2 Поверхность постоянной отрицательной кривизны . . . . .	28
1.3 Двумерное квантовое кольцо на поверхности постоянной отрицательной кривизны . . . . .	37
<b>Глава 2 Сфероидальные наноструктуры</b>	<b>43</b>
2.1 Электронный энергетический спектр . . . . .	43
2.2 Магнитный отклик . . . . .	49
<b>Глава 3 Поглощение электромагнитного излучения наносферой</b>	<b>65</b>
3.1 Оптические переходы электронов наносферы . . . . .	65
3.2 Оптические переходы электронов наносферы в магнитном поле . . . . .	79
<b>Глава 4 Поверхность постоянной отрицательной кривизны</b>	<b>101</b>
4.1 Плотность электронных состояний и квантовый эффект Холла . . . . .	101
4.2 Магнитный момент . . . . .	112
<b>Глава 5 Двумерное квантовое кольцо на поверхности постоянной отрицательной кривизны</b>	<b>119</b>
5.1 Электронный энергетический спектр . . . . .	119

5.2	Магнитный отклик и незатухающие токи . . . . .	128
	<b>Заключение</b>	<b>140</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>143</b>
	<b>Приложение А</b>	<b>156</b>

## Введение

Двадцать лет назад низкоразмерные наносистемы открыли новую область исследований в физике твердого тела. Современная технология производства позволяет создать структуры субмикронных размеров, содержащих  $10^2 - 10^9$  электронов и проявляющие металлические, полупроводниковые или даже диэлектрические свойства. Такие системы нельзя описывать обычными средствами квантовой механики нескольких частиц: хотя уравнение Шредингера для полной многочастичной волновой функции и может быть написано, из него сложно получить информацию, поскольку его трудно решить даже численно. С другой стороны, мощные методы статистической механики также мало полезны для таких систем, поскольку флуктуации макроскопических величин могут быть сравнимы с их средними значениями. Область физики конденсированного состояния, исследующая такие объекты, получила название квантовой мезоскопии. Другими словами, квантовая мезоскопия работает с системами, которые достаточно велики по сравнению с атомами и большинством молекул, но все еще слишком малы, чтобы пренебрегать специфическими квантовыми свойствами каждого из электронов. Интерес к мезоскопическим системам постоянно возрастает. Внимание к этим структурам обусловлено уникальными свойствами ряда низкоразмерных систем. Совсем недавно, в мезоскопических системах были открыты замечательные физические эффекты, имеющие фундаментальное значение: целый [1] и дробный [2] квантовый эффект Холла, эффект Ааронова — Бома в квантовых кольцах [3], квантование кондактанса в квантовых проволоках [4]. Помимо чисто академического интереса, такие системы представляют весьма зна-

чительный интерес с точки зрения практического использования мезоскопических структур. Совершенно очевидно, что эти структуры обладают целым рядом неоспоримых преимуществ перед современными электронными устройствами: компактность, энергосбережение, быстроедействие и т.д. Следствие существования возрастания плотности электронных состояний при уменьшении размерности электронного газа обуславливает принципиальное преимущество применения квантово-размерных мезоскопических структур для лазеров [5]. Одними из наиболее интересных приложений мезоскопии в будущем являются квантовые вычисления и квантовые компьютеры. Сейчас интенсивно ведутся разработки альтернативных концепций устройств квантового компьютера [6].

Например, одноэлектронный транзистор может применяться как элемент памяти в виде нано-флэш памяти, то есть наноразмерный аналог обычного элемента флэш-памяти.

Магнитные элементы памяти могут использоваться в качестве устройств энергонезависимой памяти, которые применяются в электронике для ускорения загрузки персональных компьютеров. Основополагающий принцип заключается в том, что магнетизм является неотъемлемым свойством материала устройств памяти, и устройства имеют большие времена запоминания без необходимости затраты энергии для сохранения памяти. Особый интерес вызывают спиновые устройства памяти, работающие на принципе туннельного соединения. Отметим, что записывающие головки, основанные на туннельном соединении, представляют собой уже существующие разработки.

Диоды, основанные на резонансном туннелировании, нашли различные применения, такие как аналого-цифровые преобразователи с частотой 10–100 ГГц, генераторы квантовых импульсов (для часовых устройств), сдвиговые регистры и элементы памяти со сверхнизким потреблением энергии.

Быстрые логические устройства, работающие на основе квантова-

ния потока магнитного поля, могут использоваться в технологии цифровых сверхпроводящих электронных схем. Эта технология позволяет достигнуть гигагерцового предела для микроэлементов. Таким образом, такие устройства могут найти свое применение в области микроэлектроники, где обычные кремниевые устройства (из-за ограниченности литографической технологии) не дают сравнимых частот, и где применение криогенной техники будет оправдано. Другим применением этих устройств является высокоскоростные аналого-цифровые преобразователи.

Ключевой проблемой нанотехнологии является прецизионное наноструктурирование материалов. Для создания квантовых приборов электроники будущего необходимо не только научиться создавать элементы с характерными нанометровыми размерами, но и добиться атомной гладкости поверхности элементов и прецизионности в воспроизведении всех размеров. Природа дает нам пример выполнения этих требований при самоформировании молекул и молекулоподобных объектов типа углеродных трубок. В твердотельной технологии известен ряд методов получения структур с наперед заданными свойствами. Самыми распространенными и наиболее эффективными технологиями являются молекулярно-лучевая эпитаксия, оптическая и электронно-лучевая литография. В последнее время, благодаря прогрессу в технологии, стало возможным получение искривленных двумерных слоев [7–9] и нанобъектов различной формы [10]. Суть предложенного в этих работах метода заключается в следующем. При помощи молекулярно-лучевой эпитаксии выращивается однородная по площади гетероструктура, толщина слоев которой задается с точностью до атомного монослоя. При отсоединении ультратонких напряженных слоев от подложки пленка приобретает в зависимости от граничных условий новую равновесную форму с минимумом упругой энергии пленки. Эта оригинальная технология позволяет получать нанотрубки, квантовые рулоны, кольца и спирали с контролируемыми формами и размерами.

Интерес к экспериментальным [11, 12] и теоретическим [13–22] исследованиям искривленных наноструктур резко возрос в последнее время. Это обусловлено двумя основными причинами. Во-первых, создание нанообъектов с идеальными прогнозируемыми формами является очень трудной технологической задачей. Поэтому исследование влияния отклонений от идеальной формы наноструктур на их различные физические свойства является актуальным. Во-вторых, наноструктуры с нетривиальной кривизной обладают необычными спектральными, магнитными, транспортными и оптическими свойствами. Таким образом, предполагается возможным применение этих систем в электронных устройствах нового поколения.

В связи с вышесказанным, тема диссертационного исследования представляется весьма актуальной.

Необходимо отметить, что теоретическое исследование магнитных и электродинамических свойств наноструктур является сложной проблемой, особенно, если система обладает нетривиальной кривизной. Влияние кривизны поверхности на физические свойства наноструктур является относительно малоизученным, а большинство теоретических исследований в этой области, как правило, ограничиваются лишь слегка модифицированными стартовыми выражениями, а далее применяются численные методы. Тем не менее, из-за ограниченности численных расчетов, число электронов рассматриваемое в этих численных исследованиях мало и такие методы исследования не могут применяться для изучения наноструктур, содержащих сотни или тысячи электронов. Кроме того, численные методы не всегда позволяют выявить физическую природу различных явлений, а также проанализировать их особенности.

В связи с этим возникает задача диссертационного исследования: подобрать подходящие модели для описания геометрического и потенциального конфайнмента в наноструктурах; получить аналитические формулы для энергетического спектра, магнитного и электродинамического от-

клика электронной системы; проанализировать эффекты, возникающие в магнитном и электродинамическом отклике; исследовать зависимость магнитного и электродинамического отклика от величины магнитного поля, температуры и изучить влияние поверхностной кривизны на физические свойства наноструктур; рассмотреть различные способы описания термодинамических систем (изолированные системы и находящиеся в контакте с термостатом) и исследовать влияние способа описания термодинамики системы на магнитный и электродинамический отклик неплоских наноструктур; получить необходимые для сравнения с экспериментом параметры кривых, описывающих отклик наноструктур (температурная зависимость, положение и амплитуда скачков и осцилляций, высота и ширина ступеней квантования холловской проводимости).

Начиная исследование с наноструктур, конфайнмент в которых является чисто геометрическим (наносфера, квантовый эллипсоид вращения, поверхность постоянной отрицательной кривизны), в диссертации делается переход к более сложным структурам (двумерное квантовое кольцо и квантовая точка на поверхности постоянной отрицательной кривизны), имеющим смешанный геометрический и потенциальный конфайнмент. Исследовались случаи, когда рассматриваемые системы помещались в магнитное поле, которое может изменять электронный конфайнмент и, следовательно, изменять физические свойства наноструктур.

Во всех разделах для описания электронных состояний в наноструктурах используется модель независимых бесспиновых электронов в приближении эффективной массы. В диссертационной работе основной задачей является исследование влияния кривизны поверхности на магнитный и электродинамический отклик наноструктур. Поэтому в работе не исследуются многочастичные и спиновые эффекты. В пределе малых магнитных полей модель бесспиновых независимых электронов является хорошим приближением для изучения свойств реальных квантовых структур. В этом пределе электрон-электронное взаимодействие приво-



дит только к сдвигу общей энергии электронов [23], что практически не сказывается на поведении магнитного и электродинамического отклика. Зеемановское расщепление уровней в этом пределе мало и его тоже можно не учитывать.

В случае сильных магнитных полей электрон-электронное взаимодействие, и спиновые эффекты становятся существенными. Хотя предлагаемая модель в этой области изменения полей не может дать точных результатов, она может служить основой для изучения эффектов беспорядка и многочастичных эффектов. Более того, простая модель способствует пониманию некоторых эффектов и дает качественную картину поведения магнитного и электродинамического отклика рассматриваемых структур.

Для исследования степени несферичности сфероидальных наноструктур и влияния магнитного поля на электронный энергетический спектр, а также для изучения внутризонных оптических переходов, использовалась теория возмущений, позволяющая получить простые формулы удобные для анализа, а также хорошо описывающая поведение исследуемых структур.

Для изучения энергетического спектра квантовых колец и квантовых точек на поверхности постоянной отрицательной кривизны применялась стандартная теория спектрального анализа симметрических операторов [24]. Эта теория позволила найти аналитические формулы для энергетического спектра системы и нормированные волновые функции.

В диссертации для исследования магнитного отклика электронов на поверхности постоянной отрицательной кривизны использовался подход, предложенный Ландау и основанный на представлении магнитного момента в виде однократного ряда Фурье. Этот метод позволил получить простые формулы для магнитного отклика, что дало возможность детального аналитического исследования поведения магнитного момента от магнитного поля, температуры, химического потенциала и кривизны поверхности.

Для исследования холловской проводимости электронов на поверхности постоянной отрицательной кривизны (плоскость Лобачевского) использовался метод Стреды [25], а для изучения незатухающих токов в двумерном квантовом кольце применялся подход, впервые предложенный Байерсом и Янгом [26]. Эти методы позволили получить удобные для анализа формулы и детально проанализировать исследуемые свойства систем.

Научная новизна и значимость работы определяются следующими основными результатами теоретического исследования:

1. Впервые исследовано влияние несферичности наноструктуры на магнитный момент. Показано, что спектральные и магнитные свойства сфероидальных наноструктур существенно зависят от соотношения между поправками в спектре, характеризующими степень несферичности системы и влияние магнитного поля на спектр наноструктуры.

2. Изучено поглощение электромагнитного излучения двумерного электронного газа на наносфере. Установлен резонансный характер поглощения.

3. Доказано, что в случае низких температур на кривой поглощения электромагнитного излучения наносферой имеются скачки двух типов, обусловленные вырождением электронного газа.

4. Установлено, что кривизна поверхности приводит к уменьшению ширины плато холловской проводимости и к изменению положений порогов ступеней.

5. Впервые исследован магнитный отклик двумерного электронного газа на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Установлено существование области магнитных полей, в которой магнитный момент имеет только слабую монотонную зависимость от поля. В сильных магнитных полях зависимость магнитного момента от поля является осцилляционной и не периодической по обратному полю, как в случае плоской поверхности.

6. Предложена модель квантового кольца и квантовой точки на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Исследован энергетический спектр, магнитный момент и незатухающие токи в квантовом кольце и квантовой точке на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Впервые изучено влияние кривизны поверхности на спектральные, магнитные и транспортные свойства рассматриваемых наноструктур. Установлена связь между магнитным моментом и незатухающим током в этих наноструктурах.

Рассчитанные эффекты резонансного поглощения электромагнитного излучения наносферой становятся доступными для экспериментального наблюдения и технологического применения по мере развития техники экспериментов по изучению оптических переходов электронов в наноболочечных структурах и технологии получения этих наноструктур [27]. Последние достижения в области исследования сфероидальных наноструктур (см. [28,29]), подтверждают интерес к изучению магнитных и оптических свойств этих структур.

Результаты расчета магнитных и транспортных свойств исследуемых в работе наноструктур могут быть использованы как для экспериментальной проверки влияния кривизны поверхности на квантовый эффект Холла и магнитный момент, так и для изучения новых возможностей физики и технологии наноструктур [9]. Исследование электронных состояний в квантовом кольце и квантование холловской проводимости двумерного электронного газа на поверхности постоянной отрицательной кривизны становится предметом интереса экспериментаторов, о чем свидетельствуют, в частности, доклады, представленные на конференциях (см. [30–33]).

Основные результаты диссертации опубликованы в [28–43], а также докладывались на 4-й и 5-й международных конференциях “Fullerenes and Atomic Clusters” (Санкт-Петербург, 1999 г. и 2001 г.), на международной зимней школе по физике полупроводников (Санкт-Петербург, 2003

г.), на IV всероссийской молодежной конференции по физике полупроводников и полупроводниковой опто- и наноэлектронике (Санкт-Петербург, 2002 г.), на международной конференции “Оптика, оптоэлектроника и технологии” (Ульяновск, 2001 г.), на двенадцатой межвузовской конференции “Математическое моделирование и краевые задачи” (Самара, 2002 г.), на межрегиональной научной школе для студентов и аспирантов “Материалы нано-, микро- и оптоэлектроники: физические свойства и применение” (Саранск, 2002 г.), на II международной научно-технической конференции “Проблемы и прикладные вопросы физики”, (Саранск, 1999 г.), на научной конференции Мордовского государственного университета “Огаревские чтения” (Саранск, 1998 г.), а так же на семинаре по теории конденсированного состояния в университете города Базеля (Швейцария, 2003 г.) и на семинаре кафедры теоретической физики Нижегородского государственного университета (2003 г.).

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Поведение энергетического спектра и магнитного момента сфероидальных наноструктур существенно зависит от соотношения между поправками в спектре, характеризующие степень несферичности системы и влияние магнитного поля на спектр наноструктуры.

2. Поглощение электромагнитного излучения наносферой носит резонансный характер, причем число резонансных пиков увеличивается с наложением однородного магнитного поля и существенно зависит от взаимной конфигурации вектора магнитного поля и волнового вектора фотона. При низких температурах в конфигурации Фарадея на кривой поглощения имеются четыре, а в конфигурации Фойхта — шесть резонансных пиков.

3. На резонансной кривой поглощения имеются скачки, обусловленные вырождением газа. Положение скачков на резонансной кривой в случае изолированной сферы может изменяться с увеличением температуры.

4. Однородное магнитное поле приводит к увеличению числа скачков на кривой поглощения. В случае низких температур на кривой поглощения имеются скачки двух типов. Положение скачков этих типов различным образом зависит от частоты электромагнитного излучения и величины магнитного поля.

5. Кривизна поверхности двумерного электронного газа приводит к уменьшению ширины плато холловской проводимости и к изменению положений порогов ступеней холловской проводимости. Влияние кривизны поверхности на магнитный отклик двумерного электронного газа сводится к двум особенностям: существование области магнитных полей, в которой магнитный момент имеет только слабую монотонную зависимость от поля, а при увеличении поля появляется осцилляционная зависимость не периодичная по обратному полю.

6. Кривизна поверхности обуславливает уменьшение расстояния между максимумами осцилляций типа де Гааза — ван Альфена магнитного момента двумерного квантового кольца, а также уменьшение амплитуды и периода осцилляций типа Ааронова — Бома. Кривизна поверхности и проникновение магнитного поля в проводящую область кольца приводят к нарушению пропорциональности магнитного момента и незатухающего тока. Амплитуда и “период” осцилляций незатухающего тока в квантовом кольце на поверхности постоянной отрицательной кривизны меньше чем в случае плоской поверхности.

Личный вклад автора в работу заключается в участии в разработке методов и подходов исследования, в решении поставленных задач, а также в аналитическом исследовании полученных результатов. Численный анализ проведен автором самостоятельно.

В Главе 1 приводится обзор известных исследований по тематике диссертации. Описываются общепринятые методы и подходы исследований. Формулируются задачи диссертационного исследования.

Глава 2 посвящена изучению энергетического спектра и магнитных

свойств сфероидальных наноструктур. Получены аналитические формулы для спектра и магнитного момента сфероидальных наноструктур в слабом магнитном поле, позволяющие провести анализ зависимости спектра и магнитного момента наноструктуры от величины и направления магнитного поля, геометрических параметров системы. Подробно рассмотрены различные случаи соотношения деформационной и магнитной поправки к спектру.

В Главе 3 изучено поглощение электромагнитного излучения наносферой как в присутствии магнитного поля так и без него. Детально исследованы положение, форма, число резонансных пиков, а также расстояния между пиками поглощения. Рассмотрены как случай изолированной сферы, так и случай сферы, находящейся в термостате. Изучены скачки на кривой поглощения, обусловленные вырождение электронного газа.

Глава 4 посвящена исследованию плотности электронных состояний, квантового эффекта Холла и магнитного момента двумерного электронного газа, находящегося на поверхности постоянной отрицательной кривизны (плоскость Лобачевского) в магнитном поле. Подробно изучены зависимости холловской проводимости и магнитного момента от магнитного поля, энергии Ферми, температуры и кривизны поверхности. Исследовано квантование холловской проводимости, монотонная и осциллирующая зависимости магнитного момента от магнитного .

В Главе 5 получены явные, аналитические формулы для энергетического спектра, магнитного момента и незатухающих токов для электронов в двумерном квантовом кольце на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Исследованы зависимости этих характеристик от магнитного поля, температуры, геометрических параметров кольца и кривизны поверхности. Рассмотрены предельные случаи модели: одномерное кольцо и квантовая точка. Исследованы зависимости амплитуд и периодов осцилляций магнитного момента от магнитного поля, температуры и кри-

визны поверхности. Изучено соотношение между магнитным моментом и незатухающим током в кольце.

Автор выражает свою глубокую благодарность научному руководителю В.А. Маргулису за неоценимую помощь при подготовке диссертации, соавторам работ: В.А. Гейлеру и О.Г. Кострову, а также коллегам А.В. Шорохову и Н.Г. Галкину за помощь в работе.

## Обозначения

$\mathbf{A}$  – векторный потенциал электромагнитного поля

$\mathbf{B}$  – вектор индукции магнитного поля

$c$  – скорость света в вакууме

$e$  – заряд электрона

$E_F$  – энергия Ферми

$f_0(E)$  – функция распределения Ферми – Дирака

$\hbar$  – постоянная Планка

$l$  – орбитальное квантовое число

$m$  – магнитное квантовое число

$m_e$  – масса свободного электрона

$m^*$  – эффективная электронная масса

$\mathbf{p}$  – импульс электрона

$T$  – температура

$Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$  – сферические гармоники

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

$\mu$  – химический потенциал

$\mu_B = |e|\hbar/2m_e c$  – магнетон Бора

$\Phi_0 = 2\pi\hbar c/|e|$  – квант магнитного потока

$\omega_c = |eB|/m^* c$  – циклотронная частота



# Глава 1

## Литературный обзор

### 1.1 Сфероидальные наноструктуры

Совсем недавно, благодаря значительному прогрессу в нанотехнологии, появилась возможность наносить на сферическое диэлектрическое ядро наноразмеров тонкую металлическую или полупроводниковую оболочку. Существуют два основных метода получения металлических наноболочечных структур [27]. Первый основан на одноступенчатом химическом методе, второй — на последовательном осаждении оболочечного слоя на заранее созданный диэлектрический остов. Первый метод включает химическое восстановление золота из  $\text{HAuCl}_4$  в присутствии раствора  $\text{Na}_2\text{S}$ . В результате этой реакции получают твердые золотые наночастицы и наноболочечные структуры, состоящие из диэлектрического остова сульфида золота покрытого тонким слоем золота [44–47]. Размер наноболочек может контролироваться путем введения в реакции различных реагентов. Второй метод, метод последовательного осаждения, позволяет независимо контролировать размеры и диэлектрического остова, и металлической наноболочки. В качестве диэлектрического остова используются кремниевые частицы с размерами порядка нескольких десятков нанометров. На поверхность этих наночастиц химическим образом прикрепляются золотые наночастицы с диаметром меньшим двух нанометров. Затем с такими кремниевыми наночастицами перемешивается раствор карбоната калия и  $\text{HAuCl}_4$ . Используя формальдегид, из  $\text{HAuCl}_4$  восстанавливается золото и

осаждается на поверхностных золотых наночастицах. В результате такого процесса осаждения увеличивается размер золотых наночастиц, и эти частицы сливаются в однородную золотую оболочку. Небольшое количество твердых золотых наночастиц образуются как побочный продукт, эти частицы легко могут быть удалены путем центрифугирования полученного раствора. Этот многоступенчатый метод был недавно использован для создания кремниево-серебрянных оболочек [27, 48].

В последнее время резко возрос интерес к различным физическим свойствам сферических наноструктур. Это связано с тем, что на их основе могут быть созданы оптические и электронные устройства нового поколения. Сферические наноструктуры могут применяться для получения кристаллов, которые имеют фотонную запрещенную зону и являются фотонными кристаллами [49–51]. Фотонными кристаллами называют периодические ансамбли наночастиц, в которых показатель преломления изменяется периодически, а интервал частот, для которого невозможно распространение световых волн в кристалле, называют фотонной запрещенной зоной. Такие кристаллы могут быть использованы для управления потоком света и для контроля излучательной рекомбинации (как для ее подавления, так и для усиления).

Исследования магнитного отклика в наноструктурах с различной геометрией позволяют получить важные данные о параметрах электронного энергетического спектра и потенциале геометрического конфайнмента электронов в таких системах [23, 52–59]. Это связано с тем обстоятельством, что магнитный отклик в наноструктурах в основном определяется видом электронного спектра, который в свою очередь зависит от геометрии системы. Отметим, что приложенное к наноструктуре магнитное поле может создавать дополнительный или усиливать имеющийся геометрический конфайнмент, а также создавать гибридную связь движений вдоль и поперек направления поля в случае, когда поле направлено под углом по отношению к осям симметрии системы [54, 55, 60].

Исследование магнитного отклика в наноструктурах с цилиндрической симметрией [13, 52, 58, 61, 62] показывает, что кривизна поверхности системы оказывает существенное влияние на спектральные и магнитные свойства наноструктур и может приводить к интересным физическим эффектам [52, 57, 61, 63]. Отметим, что результаты расчетов, выполненных в приближении сильной связи и в простейшей модели невзаимодействующих электронов, неплохо согласуются друг с другом. По-видимому это связано с тем обстоятельством, что именно геометрия наноструктуры играет определяющую роль в поведении электронного энергетического спектра.

В Главе 2 диссертации изучаются спектральные свойства и магнитный отклик сфероидальных квантовых наноструктур. Интерес к исследованию таких объектов связан с созданием сферических и сфероидальных нанооболочечных структур с размерами в несколько десятков нанометров.

Отметим ряд последних работ в области исследования магнитных свойств наноструктур, связанных с темой диссертации. В [64–67] для теоретического исследования электронного энергетического спектра и магнитного отклика сферических структур была использована модель независимых бесспиновых электронов (взаимодействие электронов на различных двумерных поверхностях рассмотрено в [68–72]).

В отсутствии поля электронный спектр является  $(2l + 1)$ -кратно вырожденным, приложенное однородное магнитное поле снимает это вырождение [65], что приводит к зависимости спектра от магнитного квантового числа  $m$ . Как отмечалось в [64, 67] решениями уравнения Шредингера электрона, движущегося на сфере в магнитном поле, являются вытянутые угловые сфероидальные функции [73]. К сожалению, собственные значения и собственные функции гамильтониана этой системы нельзя представить в аналитическом виде. Однако, зависимость спектра от магнитного поля и радиуса сферы можно определить различными численными методами (например, используя формализм цепных дробей [65])

или матричный способ [64, 66]).

Тем не менее, как показано в [64], для случая слабого поля ( $\Phi/\Phi_0 \ll 1$ ) и для случая сильного поля ( $\Phi/\Phi_0 \gg 1$ ) можно получить приближенные аналитические формулы для энергетического спектра электрона на сфере. Здесь  $\Phi$  — магнитный поток, проходящий через диаметрально сечение сферы.

Если  $\Phi/\Phi_0 \ll 1$  (геометрический конфайнмент намного сильнее магнитного), то магнитное поле является возмущением, и спектр сферы находится по теории возмущений. В этом пределе поле полностью снимает вырождение уровней, обусловленное сферической симметрией системы. Качественная зависимость энергетического спектра электронов от поля следующая: энергия уровней с  $m \geq 0$  растет с ростом поля и ростом  $m$ , а с  $m < 0$  — убывает, поэтому, учитывая сравнительно большое расстояние между соседними оболочками, уровни не пересекаются между собой (нет случайного вырождения) [64].

Если  $\Phi/\Phi_0 \gg 1$  (магнитный конфайнмент намного сильнее геометрического), то, отбрасывая малые возмущения в уравнении Шредингера, можно определить зависимость спектра от поля. В этом случае энергетические уровни схожи с уровнями Ландау. Необходимо отметить, что в отличие от случая слабого поля каждый уровень двукратно вырожден [64, 65]. Как и в предыдущем случае уровни не пересекаются, то есть нет случайного вырождения.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\Phi/\Phi_0 \sim 1$  (геометрический конфайнмент порядка магнитного). Как уже отмечалось выше, в этом случае нельзя найти аналитического выражения для зависимости  $E_{lm}(B)$ . Но, судя по результатам численного анализа, представленным в работах [64–66], в рассматриваемой области изменения полей спектр представляет собой сложную картину пересечения уровней, принадлежащих к разным оболочкам (уровни, принадлежащие к одной и той же оболочке не пересекаются между собой).

В [64–66] магнитный отклик вычислялся в предположении, что в системе постоянное число частиц. Показано, что в пределе низких температур зависимость магнитного момента  $M$  от поля  $B$  содержит пилообразные осцилляции. Осцилляционный характер зависимости  $M(B)$  обусловлен пересечением энергетических уровней электронов [65]. Действительно, в точках пересечения высшего занятого уровня с незанятым производная по полю от общей энергии системы терпит разрыв. При низких температурах эта производная определяет зависимость магнитного момента от поля. Ясно, что скачки в зависимости магнитного момента от поля в точках пересечения уровней обуславливают пилообразные пики.

В работах [64–66] рассмотрен только случай постоянного числа частиц. Как отмечалось выше, свойства рассматриваемой системы зависят от способа задания системы, поэтому представляется интересным сравнить зависимость  $M(B)$  для случаев постоянного числа частиц и постоянного химического потенциала.

В [64–66] магнитные свойства изучались для случая, когда  $\Phi/\Phi_0 \gtrsim 1$ . Это условие выполняется для сфер радиуса  $R > 10^{-7}$  см в области экспериментально достижимых полей ( $B \lesssim 10$  Тл). Тем не менее, полученные в этих работах не применимы к сферическим наноструктурам малого радиуса (фуллерены  $C_{60}$ ,  $C_{240}$  и металлические наносферы).

Реальные структуры трудно создать идеально сферически симметричными. В связи с этим, представляется интересным исследование влияния небольших отклонений от сферической формы системы на ее спектральные и термодинамические свойства.

В [74] аналитически и численно исследованы спектральные свойства электрона, находящегося на мезоскопической поверхности вращения произвольной формы в однородном магнитном поле параллельном к оси вращения системы. В этой работе, используя конформное отображение, геометрия системы сведена к сферической. В [74] получено линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, решая которое

можно определить волновые функции и собственные значения энергии электрона на произвольной поверхности вращения. В качестве примеров рассмотрены сферическая поверхность, поверхность эллипсоида вращения и диск. В этой работе для несферических структур рассмотрен случай очень сильных магнитных полей ( $\Phi/\Phi_0 \gg 1$ ). Показано, что в этой области полей энергетические уровни образуют подзоны Ландау.

Случай слабого поля ( $\Phi/\Phi_0 < 1$ ) для несферических структур не был рассмотрен в [74], а также не было проведено подробного анализа влияния отклонений от сферической формы на спектральные свойства рассматриваемых структур.

Отметим, что, несмотря на множество работ, посвященным свойствам электронов на кривых поверхностях, ряд задач остался неисследованным. К их числу относятся изучение свойств электронов на сфере в области сильного геометрического конфинмента по сравнению с магнитным ( $\Phi/\Phi_0 < 1$ ), изучение влияния небольших отклонений от сферической формы на спектральные и термодинамические свойства электронов в этих структурах.

В Главе 2 диссертации исследован энергетический спектр электронов и магнитный отклик в случае, когда электроны находятся на поверхности эллипсоида вращения. Эта модель может быть применена к исследованию наноболочечных структур, геометрия которых близка к эллипсоиду вращения. Если считать, что полуоси эллипсоида отличаются незначительно друг от друга, то влияние несферичности может быть проведено в рамках теории возмущений. Однако, по сравнению с моделью сферы ситуация сильно меняется в зависимости от относительного соотношения поправки к спектру, обусловленной полем  $B$  и поправки, обусловленной несферичностью геометрии системы. Кроме того, ясно, что в отличии от случая сферы, спектр и магнитный отклик эллипсоида вращения должен зависеть от угла  $\vartheta_0$  между направлением поля  $B$  и осью вращения эллипсоида.

В случае сфероидальных наноструктур с размерами в несколько десятков нанометров геометрический конфайнмент намного сильнее магнитного. Как показано ниже, этот случай реализуется, когда  $\Phi/\Phi_0 \ll 1$ . Поскольку пересечение уровней и связанные с этим эффекты [64–66] возникают при числе квантов потока  $\Phi/\Phi_0 \gtrsim 0.5$ , то ниже рассматривается только случай слабых в этом смысле магнитных полей. Эта область полей не была подробно исследована в [64–66] для случая сферы, поэтому в диссертации приведены результаты также и для этого случая. Необходимо отметить, что в работе используется простая модель двумерного газа независимых электронов на сфероидальной поверхности в приближении эффективной массы. Предполагается, что эта модель может быть применена для исследования полупроводниковых наноболочечных структур. В работе не рассматривается случай металлической оболочки, так как совсем недавно для этой наноструктуры была построена теория поглощения электромагнитного излучения, находящейся в хорошем согласии с экспериментом [44–47]. В отличие от металлической оболочки, для полупроводниковой оболочки пока не существует достаточно развитой теории, позволяющей дать полное описание кривой поглощения электромагнитного излучения. Отметим что хотя модель двумерного электронного газа на сфероидальной поверхности в приближении эффективной массы является теоретически обоснованной и широко используемой в последнее время [34, 64–67, 74], эта модель не позволяет учесть таких важных факторов, как эффекты ненулевой ширины и неоднородности наноболочки, примесные эффекты и т.д. Для большинства экспериментально реализованных структур эти эффекты дают существенный вклад в их физические свойства. Поэтому применяемая в работе модель может описывать только тонкие однородные полупроводниковые сфероидальные наноболочки, толщина которых много меньше размеров сфероидальных наноструктур. Очевидным преимуществом простой модели является возможность получить явные выражения для энергетического спектра, магнитного момента

и величины поглощения сфероидальных структур. В случае достаточно толстых или неоднородных оболочек полученные результаты в рамках предлагаемой модели могут дать только качественную картину поведения исследуемых свойств. Тем не менее, простая модель может послужить основой для дальнейшего изучения таких эффектов, как электрон-электронное взаимодействие, влияние ненулевой ширины и примесей на спектральные, магнитные и электродинамические свойства наноструктур.

Важным аспектом исследования электронных свойств наноструктур является изучение внутризонного поглощения высокочастотного электромагнитного излучения. Это связано с тем, что в случае дискретного электронного энергетического спектра кривая поглощения содержит резонансные пики в точках, в которых энергия фотона (связанная с частотой излучения) равна расстоянию между энергетическими уровнями электронов. При этом, знание резонансных частот, определяемых из эксперимента, позволяет получить важную информацию о параметрах электронного энергетического спектра и латерального конфайнмента в наноструктурах.

Необходимо отметить, что во многих случаях исследование резонансного поглощения для изучения спектральных свойств наноструктур бывает предпочтительней, чем например, транспортные измерения, так как не требует подсоединения к системе контактов, которые могут повлиять на физические свойства системы. Так в [75] найдены правила отбора для переходов между магнитными подзонами в поверхностной 2D-сверхрешетке квантовых точек, помещенной в перпендикулярное магнитное поле. Рассчитаны вероятности и определена форма линии поглощения для разрешенных и запрещенных прямых дипольных переходов между подзонами, отщепившимися от различных уровней Ландау. В работе [76] исследовано оптическое поглощение параболической квантовой ямой. Показано, что пик поглощения параболической квантовой ямой находится в инфракрасном диапазоне и не зависит от электрон-электронного взаимодействия и числа электронов в яме. Показано, что магнитное поле,



направленное перпендикулярно поверхности квантовой ямы приводит к расщеплению пика на два пика поглощения.

Обычно влияние электрон-электронного взаимодействия довольно сильно сказывается на различных физических свойствах наноструктур, в том числе и на поглощении. Так в [77] исследованы многоэлектронные эффекты для квантовой сферы. Рассмотрены многочастичные возбуждения на сфере (сферические плазменные моды) и показано, что эти возбуждения отличаются от мод на плоской поверхности тем, что сферические плазменные моды дискретны по частоте и наименьшая плазменная частота больше нуля. В результате электрон-электронного взаимодействия резонансные частоты отличаются от частот, которые бы возникали, исходя из одноэлектронного приближения. Следовательно, для описания внутреннего поглощения необходимо было бы учитывать различные коллективные эффекты. Однако в пределе малых магнитных полей модель независимых электронов является хорошим приближением для изучения свойств реальных нанооболочечных структур. В этом пределе электрон-электронное взаимодействие приводит только к сдвигу общей энергии электронов [23], что практически не сказывается на поглощении электромагнитного излучения.

Необходимо отметить, что для существования резонансного поглощения необходимо наличие дискретного спектра, слабо размытого температурой и столкновениями с решеткой. Тогда резонансное поглощение электромагнитного излучения будет вызвано переходами между отдельными уровнями дискретного спектра.

Представляется интересным исследовать для сферических наноструктур зависимость поглощения электромагнитного излучения от величины и направления магнитного поля, а также от направления вектора поляризации фотонов. Исследование может быть проведено в рамках метода предложенного Фрелихом [78] и рассмотренного для переходов в магнитном поле в работе Басса и Левинсона [79]. Этот метод основан

на применении обычной теории возмущений для получения коэффициента внутризонного поглощения высокочастотного электромагнитного поля (тогда переходы рассматриваются в первом порядке теории возмущений).

В диссертации для внутризонного поглощения использовались выражения, следующие из [78, 79]

$$\Gamma = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{c\hbar SN_{\mathbf{k}}} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_n \sum_{n'} f_0(E_n)[1 - f_0(E_n + \hbar\omega)] \times \\ \times |\langle n', -\mathbf{k} | H_R | n, 0 \rangle|^2 \delta(E_n - E_{n'} + \hbar\omega), \quad (1.1)$$

где  $n$  — совокупность квантовых чисел характеризующих состояние электрона в системе,  $\varepsilon(\omega)$  — вещественная часть диэлектрической проницаемости,  $N_{\mathbf{k}}$  — концентрация падающих на наносферу фотонов с частотой  $\omega$ ,  $\mathbf{k}$  — волновой вектор фотона,  $S$  — площадь поверхности, множитель  $1 - \exp(-\hbar\omega/T)$  учитывает вынужденное испускание фотонов. Оператор электрон-фотонного взаимодействия имеет вид

$$H_R = \frac{|e|\hbar}{m^*} \sqrt{\frac{2\pi\hbar N_{\mathbf{k}}}{\varepsilon(\omega)\omega}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}} \mathbf{P}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}$  — вектор поляризации фотона,  $\mathbf{P}$  — при нулевом магнитном поле есть оператор импульса электрона, а в магнитном поле  $\mathbf{P} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$ .

Недавний значительный прогресс в нанотехнологии сделал возможным изготовление сферических наноструктур с размерами от нескольких до сотен нанометров [80–82]. Исследования сферических наноструктур показали, что они обладают интересными спектральными [83] и оптическими свойствами [84–86]. Как показано в [84–87], поглощение оптического излучения сферической металлической наноструктурой хорошо описывается в классическом подходе. Оптические свойства наночастицы зависят от ее размера и геометрии. Влияние формы наноструктуры на спектр поглощения исследовалось в [88].

Исследованию оптических свойств диэлектрических ядер из  $\text{Au}_2\text{S}$  покрытых металлической оболочкой из золота посвящен ряд работ [44–47]. Исследования по поглощению электромагнитного излучения среды,

содержащей такие наноболочечные структуры показали, что в спектре поглощения существует резонансный пик в оптической области спектра, связанный с поглощением излучения наноболочечными структурами [44, 45]. На основе классической теории [87], была разработана теоретическая модель для описания оптических свойств сферических наноболочек. Было установлено, что пик поглощения является плазменным резонансом электронов в системе, а положение и интенсивность пика поглощения зависят от толщины металлической оболочки и диаметра диэлектрического ядра [44, 45]. Исследования оптического поглощения наноструктур позволили понять кинетику роста наноструктуры [45] и найти значения таких параметров, как время релаксации электрона и константы электрон-фононной связи [44]. Исследования нелинейного оптического отклика наноболочечных сферических и сфероидальных систем [89–91] показали, что оболочка структуры может значительно усиливать нелинейный оптический отклик системы. Отметим, что в случае тонкой металлической или полупроводниковой оболочки (порядка нескольких атомных слоев) в свойствах системы становится важным проявление квантовых эффектов, и использование классической модели для описания оптического поглощения наноболочкой является неприменимым [44]. Несмотря на довольно подробное изучение оптических свойств сферических наноболочек, остается практически не изученным случай очень тонкой металлической оболочки, то есть случай, когда проявляются квантовые свойства системы, а применение классических методов исследования не является допустимым. Таким образом, исследование внутризонного поглощения тонкой полупроводниковой или металлической сферической оболочкой является весьма актуальным.

В Главе 3 диссертационной работы проведено исследование оптических переходов электронов на поверхности наносферы, находящейся в слабом однородном магнитном поле. Модель электронного газа на поверхности сферы широко используется для исследования спектраль-

ных [67, 74], магнитных [34, 64–66] и транспортных [92] свойств сферических или сфероидальных наноструктур, а также для анализа влияния электрон-электронного взаимодействия [69] и спин-орбитального взаимодействия [93] на спектральные свойства электронов в сферических системах. Модель электронного газа на поверхности сферы можно применить для исследования нанооболочечной структуры с толщиной оболочки много меньшей размеров структуры.

## 1.2 Поверхность постоянной отрицательной кривизны

Одномерное или двумерное движение частицы в трехмерном евклидовом пространстве является хорошо известной задачей классической механики. Существует два способа ее решения. В первом способе (подход Ньютона) частица движется в трехмерном пространстве под действием некоторых пространственных сил, ограничивающих движение частицы на заданной поверхности или на кривой. Во втором способе (подход Лагранжа) ограничение движения частицы на двумерной поверхности или на кривой вводится изначально через обобщенные координаты, и для дальнейших вычислений не имеет значения как данная поверхность (или кривая) вложена в евклидово пространство. Для гладких поверхностей (или кривых) оба эти подхода дают одинаковые уравнения движения.

В квантовой механике рассмотренная проблема является более сложной. Так если мы выберем первый подход и запишем трехмерное уравнение Шредингера для рассматриваемой частицы, то ограничение движения частицы на некоторой поверхности может быть осуществлено только в предельном переходе, в результате которого энергия частицы будет стремиться к бесконечности. Действительно, по аналогии с силами связей в классической механике, ограничение движения частицы на поверхности можно описывать с помощью ограничивающего потенциала, который равен нулю на поверхности и бесконечности вне рассматриваемой поверхности. С другой стороны, если выбрать второй подход, то в этом подходе не

учитывается способ вложения рассматриваемой поверхности в евклидово пространство. Хотя различие в этих подходах заключается только в одном слагаемом в гамильтониане (в поверхностном потенциале), эти два способа описания в квантовой механике приводят к качественным различиям в трактовке проблемы движения частицы на некоторой поверхности [94].

Одночастичный гамильтониан на произвольной двумерной римановой поверхности в магнитном поле имеет вид

$$H = \frac{1}{2m^*} g^{-1/2} \left( \frac{\hbar}{i} \partial_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) g^{1/2} g^{\mu\nu} \left( \frac{\hbar}{i} \partial_\nu - \frac{e}{c} A_\nu \right) + V_s, \quad (1.3)$$

где  $g^{\mu\nu}$  — контравариантные компоненты метрического тензора многообразия,  $g = \det g^{\mu\nu}$ ,  $A_\mu$  — компоненты векторного потенциала магнитного поля  $\mathbf{B}$ ,  $V_s$  — поверхностный потенциал, обусловленный кривизной поверхности. Отметим, что на кривых поверхностях векторный потенциал и вектор индукции магнитного поля удобно рассматривать в терминах дифференциальных форм. Тогда векторный потенциал — это ковариантный вектор ( $A = A_\mu dx^\mu$ ), а вектор индукции магнитного поля — это внешний дифференциал векторного потенциала ( $B = dA$ ), то есть индукция магнитного поля есть кососимметричный ковариантный тензор валентности 2. Такой подход позволяет достаточно просто определять векторный потенциал в различных калибровках. В частности, легко показать, что при калибровочном преобразовании векторного потенциала  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f$  индукция не изменяется ( $dA' = dA$ ), а гамильтониан  $H$  заменяется на унитарно эквивалентный оператор:  $H(A'_\mu) = \exp(ief/c\hbar) H(A_\mu) \exp(-ief/c\hbar)$ .

Необходимо отметить, что  $V_s$  имеет различный вид в разных подходах рассмотрения движения электронов, ограниченного некоторой поверхностью. В первом подходе  $V_s$  зависит от главных кривизн поверхности  $k_1$  и  $k_2$ :  $V_s = -(\hbar^2/8m^*)(k_1 - k_2)^2$ . Так как главные кривизны зависят от способа вложения кривой поверхности в евклидово пространство и могут быть различными для изометрических поверхностей, то получается, что в этом подходе поверхностный потенциал будет различным для изометричных поверхностей [94]. Во втором же подходе он равен

$V_s = (\hbar^2/2m^*)\lambda R$  [95, 96], где  $\lambda$  — некий безразмерный параметр, а  $R$  — скалярная кривизна:  $R = R^{\mu\nu}g_{\mu\nu}$  ( $R^{\mu\nu}$  — контравариантные компоненты тензора Ричи). Скалярная кривизна характеризует собственные свойства кривой поверхности и одинакова для изометрических поверхностей. Исходя из всего этого получаем, что в первом подходе движение частицы описывается по-разному для изометрических поверхностей, а во втором подходе изометрические поверхности обладают одинаковыми свойствами, характеризующими движение частицы по этим поверхностям.

Рассмотрим более подробно второй подход в описании движения частицы на кривой поверхности. Необходимо отметить, что до сих пор различные аргументы дают разные значения для параметра  $\lambda$ :  $\lambda = 0$  [18, 97, 98],  $\lambda = 1/12$  [99],  $\lambda = 1/8$  [95, 96, 100]. Для случая постоянной скалярной кривизны  $R$  (например случай плоскости Лобачевского или сферы) различия в выборе значения  $\lambda$  не существенны, так как они влияют на абсолютное значение энергии электронных уровней, а не на расстояния между уровнями. Необходимо отметить, что слагаемое подобное ограничивающему потенциалу (пропорциональное скалярной кривизне) возникает в ряде других задач, например в теории суперсимметрии [101] или при изучении малых колебаний произвольно искривленной мембраны, поверхность которой рассматривается как двумерное риманово пространство [102]. Уравнение Эйлера — Лагранжа, описывающее эти колебания, наряду с двумерным оператором Бельтрами — Лапласа содержит дополнительный член, пропорциональный скалярной кривизне мембраны.

Двумерный электронный газ в квантующем магнитном поле привлекает значительное внимание в течении последнего времени. Интерес к этой системе связан с уникальными свойствами двумерного электронного газа: осцилляции магнитного момента в зависимости от магнитного поля периодичны по обратному полю (эффект де Гааза — ван Альфена), осцилляции сопротивления (эффект Шубникова — де Гааза), квантование холловской проводимости (целочисленный и дробный квантовые эффекты

Холла), циклотронный резонанс.

Одним из фундаментальных свойств двумерного электронного газа является квантовый эффект Холла [1]. Этот эффект заключается в следующем [103]. Если образец с двумерным электронным газом при температуре порядка 1 К поместить в сильное поперечное магнитное поле порядка 10 Тл, то наблюдается ступенчатая зависимость холловской проводимости от магнитного поля или от напряжения на затворе. Высота ступеней одинакова и равна  $e^2/h$ . Квантование холловской проводимости двумерного электронного газа можно объяснить на примере классического эффекта Холла. Как известно, классическая холловская проводимость трехмерного металлического образца  $\sigma_{xy} = -|e|cN/B$ , где  $N$  — концентрация электронов в образце,  $B$  — магнитное поле. Теперь рассмотрим двумерный электронный газ в квантующем магнитном поле. Энергетический спектр состоит из уровней Ландау, причем число состояний на каждом уровне Ландау равно  $N_L = |e|B/hc$ . В сильном магнитном поле энергия Ферми лежит между уровнями Ландау, поэтому при низких температурах  $N = N_L i$ , где  $i$  — число полностью заполненных уровней Ландау. Подставляя это выражение в формулу для холловской проводимости, получаем известную формулу для проводимости в режиме квантового эффекта Холла  $\sigma_{xy} = -e^2 i/h$ . Эта формула показывает, что холловская проводимость двумерного электронного газа не зависит от параметров материала, геометрии образца и температуры и всегда кратна комбинации мировых констант. В то же время в условиях наблюдения квантового эффекта Холла диссипативная проводимость обращается в нуль. Точность, с которой выполняется закон квантования холловской проводимости, оказалась необычно высокой.

Несмотря на то, что этот эффект был открыт и теоретически объяснен около 20 лет назад, интерес к этому явлению не уменьшается до сих пор. Большое количество работ посвящено влиянию на квантовый эффект Холла электрон-электронного [104] и электрон-фононного взаи-

модействий [105], спин-орбитального взаимодействия и связанному с ним аномальному эффекту Холла [53,106]. Интересное поведение холловской проводимости возникает из-за эффектов беспорядка [107,108] и в слабых магнитных полях [109], наблюдается разрушение квантового эффекта Холла под действием сильных токов [110].

Другим направлением исследования квантового эффекта Холла, как теоретического [13–22] так и экспериментального [11,12], является изучение влияния кривизны поверхности двумерного электронного газа на транспортные свойства. Квантовый эффект Холла изучался для электронов на различных неплоских поверхностях: квантовый цилиндр [13], сфера [14,15], тор [16] и плоскость Лобачевского [17–22].

В первом разделе Главы 4 изучается влияние кривизны поверхности двумерного электронного газа на холловскую проводимость в сильных магнитных полях. Рассматривается случай когда двумерный электронный газ расположен на поверхности постоянной отрицательной кривизны (плоскость Лобачевского). Хотя плоскость Лобачевского пока экспериментально не реализована, теоретический интерес к различным свойствам этой структуры увеличивается. Исследованы геометрическая фаза [95] и точечные возмущения [111] на плоскости Лобачевского. В [97] изучалась как классическая, так и квантовая динамика заряженной частицы на плоскости Лобачевского в однородном магнитном поле. Показано, что классическая траектория движения частицы с энергией  $E < m^* \omega_c^2 a^2 / 2$  является замкнутой, а движение частицы с энергией  $E > m^* \omega_c^2 a^2 / 2$  является инфинитным. В случае квантовой динамики в [97] найден энергетический спектр и волновые функции заряженной частицы на плоскости Лобачевского в магнитном поле. Показано, что замкнутым траекториям в квантовой механике соответствует дискретный спектр, а инфинитному движению — непрерывный спектр частицы. Кроме того, в [97] проведено исследование квазиклассического движения частицы. Показано, что так же как и для плоского случая дискретный спектр, полученный в



рамках квазиклассического приближения, совпадает с выражением для спектра в квантовом пределе. Теория хаоса на поверхностях постоянной отрицательной кривизны является объектом интенсивного исследования [21, 100, 112, 113]. Существует несколько причин для неуклонно растущего интереса к бильярду на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Во-первых, метрика таких поверхностей обуславливает экспоненциальное “разбегание” соседних траекторий, делая такой бильярд идеальным объектом для изучения классической хаотической динамики. Во-вторых, формула для плотности состояний бильярда на поверхности постоянной отрицательной кривизны является точной, в отличие от аналогичной формулы для евклидового бильярда. Кроме того, поверхность постоянной отрицательной кривизны является привлекательным объектом для исследования хаотической динамики, так как компактная поверхность постоянной отрицательной кривизны по топологии соответствует различным геометрическим объектам в отличие от поверхностей постоянной положительной или нулевой кривизны. Действительно, в случае поверхностей постоянной положительной кривизны компактная поверхность по топологии является сферой. В случае поверхностей нулевой и отрицательной кривизны для исследования хаоса необходимо сделать систему компактной. Топология компактной поверхности евклидовой плоскости не зависит от способа получения компактной поверхности, которая всегда является тором. В отличие от поверхностей постоянной положительной и нулевой кривизны различные способы получения компактной поверхности постоянной отрицательной кривизны приводят к поверхностям, отличающимся по топологии. Поэтому движение классической частицы на поверхности постоянной отрицательной кривизны обладает наиболее хаотическим поведением. В последнее время квантовый эффект Холла на плоскости Лобачевского стал объектом интенсивного изучения. Так в [17–19] изучались свойства волновой функции Лафлина, в [20] разработаны методы некоммутативной геометрии для исследования квантового

эффекта Холла. В [22] показано, что квантовый эффект Холла в потоке Ааронова — Бома обладает интересными особенностями.

Изучение магнитных квантовых осцилляций началось с работы Ландау [114], в которой исследовался магнитный момент трехмерного электронного газа и было теоретически предсказано наличие быстро осциллирующей составляющей магнитного момента. В том же году эти осцилляции были экспериментально обнаружены де Гаазом и ван Альфеном [115]. В течении последующего времени теория и эксперимент по магнитным осцилляциям интенсивно развивались. Важным моментом в теории магнетизма стала работа Лифшица и Косевича [116]. В этой работе было получена формула, описывающая зависимость намагниченности трехмерного металла от магнитного поля и температуры в случае произвольного энергетического спектра.

Метод основанный на исследовании магнитных осцилляций является довольно мощным и интенсивно используемым методом физики конденсированного состояния. Он позволяет выявить структуру поверхности Ферми в металлах и определить величину эффективной массы электрона. Так эффект де Гааза — ван Альфена стал первым явлением, позволившим определить электронный энергетический спектр системы [117].

Физическая причина магнитных осцилляций де Гааза — ван Альфена хорошо известна: при изменении магнитного поля уровни Ландау пересекают химический потенциал системы, при таких пересечениях плотность электронных состояний, а следовательно и магнитный момент системы, изменяется скачком.

Первой работой, посвященной теории двумерного эффекта де Гааза — ван Альфена, была работа Пайэрлса [118]. В пределе нулевой температуры он показал, что намагниченность идеального двумерного электронного газа имеет резкие пилообразные осцилляции с постоянной амплитудой. Хотя качественный характер магнитных осцилляций в плоской двумерной системе такой же, как и для трехмерного электроно-

го газа (в обоих случаях магнитный момент периодичен по обратному полю), существует принципиальная разница между этими случаями. В работе [116] по трехмерному эффекту де Гааза — ван Альфена предполагалось, что химический потенциал постоянен и не зависит от магнитного поля. Это предположение является хорошим приближением в трехмерном случае, подтверждающееся экспериментальными данными, но оно может не выполняться в случае двумерного электронного газа. Действительно, в трехмерном случае электронный спектр непрерывен и Ферми поверхность пересекается многими уровнями Ландау. Таким образом, химический потенциал приблизительно равен Ферми энергии и не осциллирует с изменением магнитного поля. В двумерном случае электронный спектр дискретен, и химический потенциал при низких температурах “прикреплен” к верхнему занятому электронами уровню Ландау. При изменении магнитного поля изменяется номер верхнего занятого уровня Ландау, а, следовательно, химический потенциал испытывает скачки в зависимости от магнитного поля. Осцилляционная зависимость химического потенциала была недавно подтверждена экспериментально [119]. В [120] проведены теоретические исследования осцилляций де Гааза — ван Альфена двумерного электронного газа. Как показано в [120], в двумерном случае поведение амплитуды осцилляций магнитного момента как функции магнитного поля и температуры отличается от известной формулы Лифшица — Косевича для трехмерного электронного газа.

Необходимо отметить, что двумерный эффект де Гааза — ван Альфена и целочисленный эффект Холла имеют общую физическую сущность, так как эти эффекты обусловлены особенностями в плотности электронных состояний, возникающими при изменении магнитного поля. Это обстоятельство подробно исследовано в [121]. В этой работе было показано, что в двумерной системе, помещенной во внешнее магнитное поле  $H$ , вследствие эффекта де Гааза — ван Альфена магнитная индукция  $B$ , при некоторых условиях, может принимать лишь определенные дискретные

значения, то есть она “квантуется”. При этом зависимость  $B(H)$  состоит из скачков и плато. На плато  $B(H) = \text{const}$ . Вследствие квантования магнитной индукции  $B(H)$  возможно квантование холловской проводимости  $\sigma_{xy}(H)$ .

В последнее время возрос интерес к исследованию магнитных свойств электронов неплоских наноструктур. Это обусловлено тем, что геометрия этих структур сильно влияет на энергетический спектр электронов, что, в свою очередь, приводит к интересным эффектам, проявляющимся в поведении магнитного момента в зависимости от магнитного поля, температуры и от геометрических параметров системы. В первом разделе этой главы подробно рассмотрены особенности, возникающие в магнитном моменте сфероидальных квантовых наноструктур. Интересными магнитными свойствами обладают двумерные наноструктуры с цилиндрической симметрией (квантовые цилиндр и браслет). В [57] показано, что осцилляции магнитного момента этих структур с изменением магнитного поля будут иметь характер осцилляций Ааронова — Бома. Причем особенности в зависимости магнитного момента квантового цилиндра от магнитного поля имеют вид клюва и зависят от величины химического потенциала. В случае квантового браслета число осцилляций увеличивается и зависимость магнитного момента от магнитного поля становится более сложной. Таким образом, исследование магнитного момента неплоских наноструктур является весьма интересной и актуальной задачей.

Во втором разделе Главы 4 изучается магнитный момент двумерного электронного газа на поверхности постоянной отрицательной кривизны (плоскость Лобачевского) в ортогональном магнитном поле. Магнитные свойства такой системы не изучены. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, поверхность постоянной отрицательной кривизны пока экспериментально не получена, а во-вторых исследования магнитных свойств такой структуры является достаточно сложной теоретической задачей. Тем не менее, недавний прогресс в технологии получения двумерных

наноструктур с произвольной контролируемой геометрией [9] позволяет утверждать, что по-видимому нет принципиальных трудностей в экспериментальной реализации части поверхности постоянной отрицательной кривизны. Как показано в [97], электронный газ на плоскости Лобачевского обладает следующими спектральными свойствами: при малых энергиях энергетический спектр электронов чисто дискретен и похож на уровни Ландау для плоской двумерной системы, при больших энергиях энергетический спектр электронов становится непрерывным, причем нижняя граница непрерывного спектра квадратично возрастает с увеличением магнитного поля. Таким образом, при определенных значениях магнитного поля ниже энергии Ферми лежит как дискретная так и непрерывная часть спектра, при увеличении магнитного поля нижняя граница непрерывной части спектра пересекает энергию Ферми и тогда ниже этого уровня лежит только дискретный спектр системы. В связи с этим, представляется интересным изучение магнитного момента электронов на поверхности постоянной отрицательной кривизны и исследование изменения поведения магнитного момента системы при пересечении нижней границей непрерывного спектра уровня Ферми.

### **1.3 Двумерное квантовое кольцо на поверхности постоянной отрицательной кривизны**

Мезоскопические квантовые кольца привлекают устойчивое теоретическое и экспериментальное внимание на протяжении многих лет. Интерес к этим наноструктурам, прежде всего, связан с их уникальными свойствами (эффект Ааронова — Бома [3,122–125], квантовый эффект Холла [126], незатухающие токи [52,127–131], фаза Бэрри [132–134] и эффекты спин-орбитального взаимодействия [53,135]). Кроме того, интерес к квантовым кольцам обусловлен потребностью создания субмикронных электронных устройств для технических и технологических целей.

Наиболее простой моделью, применяемой для описания свойств кольцевого устройства, является одномерное кольцо в потоке Ааронова — Бома. Хотя такая одномерная модель играет важную роль в понимании квантовых интерференционных эффектов в кольцах [52, 136–139], экспериментальные изучения эффекта Ааронова — Бома и незатухающих токов в кольцеобразных устройствах обнаруживают интересные явления [123, 130, 135, 140–143], которые не могут быть объяснены в рамках одномерной модели. Одним из важных факторов, влияющих на поведение физических характеристик квантовых колец, является ненулевая ширина кольца [122, 127, 144–146]. Лорке и др. [140] показали, что даже в очень малых кольцах, содержащих один или два электрона, присутствует несколько электронных мод, соответствующих разным радиусам электронных орбит в кольце. Кроме многомодовых эффектов, ненулевая ширина колец обуславливает проникновение однородного магнитного поля (которое используется во всех практических экспериментах) в проводящую область кольца [122, 127, 144, 146]. Этот эффект играет важную роль в различных свойствах квантового кольца. Например, эффект проникновения магнитного поля в проводящую область кольца является причиной негармонических осцилляций незатухающего тока [123, 127, 141, 144, 146] и обуславливает нарушение линейной зависимости незатухающего тока от магнитного момента кольца [127].

Для объяснения экспериментов, в которых ширина кольцевого устройства приводит к существенным эффектам, был предложен целый ряд теоретических моделей [122, 127, 144–147]. Учет ширины кольца является достаточно сложной задачей. Поэтому большинство работ использовало или квазиклассическое приближение [147], или численные методы. Для численного решения уравнения Шредингера применялся потенциал конфинмента жесткой стенки [147, 148], параболический потенциал [23, 148, 149] и прямоугольный конечный потенциал [145]. Совсем недавно, разработана теория функционала токо-спиновой плотности для чис-

ленного исследования спектральных, магнитных и транспортных свойств кольца ненулевой ширины [150, 151]. В рамках этой теории радиальный потенциал конфайнмента кольца выбирается параболическим и удается учесть кулоновское взаимодействие электронов, различные спиновые и примесные эффекты. Тем не менее, из-за ограниченности численных расчетов, число электронов рассматриваемое в этих численных изучениях мало и данные теоретические методы исследования не могут применяться для исследования мезоскопических колец радиуса в несколько десятков или сотен нанометров. Существуют теоретические модели, позволяющие аналитически получать спектр и волновые функции электрона в квантовых кольцах [122, 127, 144, 146]. В рамках этих моделей был объяснен сложный осцилляционный характер зависимости магнитного момента от магнитного поля. Было показано, что на осцилляции типа де Гааза — ван Альфена накладываются осцилляции типа Ааронова — Бома. Причем амплитуда осцилляций типа Ааронова — Бома уменьшается, а амплитуда осцилляций де Гааза — ван Альфена увеличивается с увеличением магнитного поля. Таким образом, при малых магнитных полях наложение осцилляций типа Ааронова — Бома на осцилляции типа де Гааза — ван Альфена приводит к очень сложной для анализа осцилляционной картине. При больших магнитных полях амплитуда и период осцилляций типа Ааронова — Бома становятся намного меньшими амплитуды и периода осцилляций типа де Гааза — ван Альфена. Эксперименты по спектроскопии колец показали, что параболический потенциал очень хорошо описывает нижние электронные состояния в квантовом кольце. Можно показать, что предложенный в [122, 144] потенциал конфайнмента так же находится в хорошем согласии с экспериментом.

Квантовая интерференция приводит к различным новым явлениям в транспортных свойствах наноструктур. Тем не менее, сохранение фазовой когерентности волновых функций во всей системе влияет и на равновесные свойства систем. Байерс и Янг [26] впервые показали, что

при низких температурах, при которых длина фазовой когерентности становится больше характеристических размеров образца, в квантовом кольце, помещенном в магнитное поле, может возникать равновесный циркулирующий по кольцу незатухающий ток. Работа Бюттикера, Имри и Ландауэра [137], предсказывающая возникновение незатухающих токов в неупорядоченных квантовых кольцах, усилила интерес к этому свойству квантовых колец. Благодаря недавним достижениям в субмикронной экспериментальной физике [131], внимание к незатухающим токам в кольцах резко усилилось [127, 128]. Было показано, что в очень тонких квантовых кольцах незатухающий ток (так же как и магнитный момент) осциллирует с периодом равным кванту потока  $\Phi_0$  (эффект Ааронова — Бома). Этот эффект находит простое объяснение. Если рассмотреть одномерное квантовое кольцо, то волновая функция электрона в этом кольце является периодической функцией магнитного потока, проходящего через кольцо, с периодом равным кванту потока. Таким образом, любая равновесная физическая характеристика квантового кольца будет являться периодической функцией магнитного потока. Причем для одномерного кольца имеет место очень простая связь незатухающего тока  $I$  и магнитного момента  $M$ :  $I = cM/S$ , где  $S$  — площадь, ограниченная кольцом. Однако, в широких кольцах помимо орбитальных мод движения электронов в кольце присутствуют и радиальные моды. Это приводит к нарушению периодичности и заметному усложнению осцилляций незатухающего тока в кольце. Кроме того, в широких квантовых кольцах возникают эффекты, связанные с проникновением однородного магнитного поля в проводящую область кольца. Эти эффекты приводят к нарушению простой линейной зависимости между незатухающим током и магнитным моментом кольца [127], а также приводят к появлению нового типа осцилляций магнитного момента аналогичных осцилляциям де Гааза — ван Альфена [57, 122, 127].

В Главе 5 исследуется влияние кривизны поверхности на энергетический спектр, магнитный момент и незатухающий ток в двумерном



квантовом кольце. Изучаются эффекты проникновения магнитного поля в проводящую область кольца; исследуется зависимость энергетического спектра, незатухающего тока и магнитного момента кольца от величины однородного магнитного поля и потока Ааронова — Бома; изучается влияние параметров кольца и кривизны поверхности на спектральные, магнитные и транспортные свойства.

Для решения поставленной задачи используется модель независимых бесспиновых электронов, находящихся на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Движение электронов на поверхности ограничено потенциалом конфайнмента двумерного квантового кольца. Рассматривается случай однородного магнитного поля и случай, когда поток Ааронова — Бома проходит через центр кольца. Данная модель является очень гибкой: ширина и радиус кольца могут независимо варьироваться при изменении двух параметров потенциала конфайнмента. В частных случаях, потенциал конфайнмента может описывать одномерное кольцо и квантовую точку.

Так как основной задачей является исследование влияния поверхностной кривизны на спектральные, магнитные и транспортные свойства квантового кольца, то в работе не учитываются многочастичные и спиновые эффекты. В пределе малых магнитных полей модель бесспиновых независимых электронов является хорошим приближением для изучения свойств реальных полупроводниковых квантовых колец. В этом пределе электрон-электронное взаимодействие приводит только к сдвигу общей энергии электронов [23], что практически не сказывается на поведении магнитного момента и незатухающего тока. Зеемановское расщепление уровней в этом пределе мало и его тоже можно не учитывать.

В случае сильных магнитных полей электрон-электронное взаимодействие, и спиновые эффекты становятся существенными. Хотя предполагаемая модель в этой области изменения полей не может дать точных результатов, она может послужить основой для изучения эффектов бес-

порядка и многочастичных эффектов. Более того, простая модель может помочь в понимании некоторых эффектов и дать качественную характеристику поведения магнитного отклика рассматриваемой структуры. Так, совсем недавно, эксперименты по спектроскопии квантовых полупроводниковых колец [140] показали, что даже в области больших магнитных полей одноэлектронная модель достаточно хорошо описывает электронные спектральные свойства кольца.

## Глава 2

# Сфероидальные наноструктуры

### 2.1 Электронный энергетический спектр

Найдем спектр бесспиновых электронных состояний для невзаимодействующих электронов, находящихся в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$  и движущихся по поверхности эллипсоида вращения. Гамильтониан таких электронных состояний имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m^*} + \frac{|e|\hbar}{2m^*c} \mathbf{B} \mathbf{L} + \frac{e^2 \hbar^2}{8m^*c^2} [\mathbf{B}, \mathbf{r}]^2, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{L}$  — оператор момента импульса электрона. Два последних слагаемых малы, поэтому они дают малое возмущение спектра эллипсоида магнитным полем. Третье слагаемое в (2.1) квадратично по полю  $B$  и много меньше второго.

Координаты  $x, y, z$  связаны уравнением эллипсоида вращения:  $(x^2 + y^2)/R^2 + z^2/d^2 = 1$ . Введем новые переменные по формулам  $\xi = x, \eta = y, \zeta = Rz/d$ . Эти переменные связаны уравнением сферы:  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$ . В новых переменных лапласиан имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + (1 - \beta)^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} = \Delta^\circ + \beta(\beta - 2) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad (2.2)$$

где  $\beta = 1 - R/d, \Delta^\circ = \partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2 + \partial^2/\partial \zeta^2$ .

Скалярное произведение  $\mathbf{B} \mathbf{L}$  в новых переменных имеет вид  $\mathbf{B} \mathbf{L} = B_x L_\xi + B_y L_\eta + B_z L_\zeta + o(B\beta)$ , где  $L_\xi, L_\eta, L_\zeta$  — составляющие оператора момента импульса в системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Введем безразмерные ве-

личины  $b_j = R^2/a_j^2$ , где  $a_j^2 = c\hbar/|e|B_j$  ( $j = x, y, z$ ) и  $l_i = L_i/\hbar$  ( $i = \xi, \eta, \zeta$ ), тогда гамильтониан можно записать в виде

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2} \left( -\Delta_{\vartheta, \varphi}^{\circ} + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \right) + o(B\beta), \quad (2.3)$$

где

$$V_1 = 2\beta R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \quad V_2 = -\beta^2 R^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

$$V_3 = b_x l_\xi + b_y l_\eta + b_z l_\zeta, \quad V_4 = \frac{b^2}{4} \cdot \frac{1}{B^2 R^2} [\mathbf{B}, \mathbf{r}]^2,$$

а  $\Delta_{\vartheta, \varphi}^{\circ}$  — угловая часть оператора Лапласа в новых переменных.

Представление гамильтониана в виде (2.3) будет использовано в двух предельных случаях:  $\beta = o(B^2)$  или  $B = o(\beta^2)$ . Поэтому в обоих случаях слагаемое  $o(B\beta)$  может быть опущено.

Будем называть деформационным возмущением слагаемые в гамильтониане, обусловленные несферичностью геометрии системы, магнитным возмущением — слагаемые, обусловленные воздействием на систему магнитного поля, а поправки к энергии, связанные с этими возмущениями, — деформационной поправкой и магнитной поправкой, соответственно.

Далее рассмотрим отдельно три случая, связанные с различными относительными величинами основных поправок определяемых возмущениями  $V_1$  и  $V_3$ , а именно:

1. Деформационная поправка к энергии и магнитная поправка одного порядка, то есть когда  $\beta \sim \max |b_j|$ .
2. Деформационная поправка к энергии много больше магнитной поправки, то есть когда  $\beta \gg \max |b_j|$ .
3. Деформационная поправка к энергии много меньше магнитной поправки, то есть когда  $\beta \ll \max |b_j|$ .

Рассмотрим вначале первый случай, когда эти поправки одного порядка. Спектр оператора  $\Delta_{\vartheta, \varphi}^{\circ}$  и его собственные функции хорошо извест-

ны

$$\mathcal{E}_l^0 = l(l+1); \quad |\psi_{l,m}^0\rangle = |Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)\rangle \equiv |l, m\rangle. \quad (2.4)$$

Таким образом, спектр  $2l+1$  раз вырожден. Первую поправку к энергии  $\varepsilon_1$  найдем из секулярного уравнения  $\det[\langle l, m_1 | V_1 + V_3 | l, m_2 \rangle - \varepsilon_1 \delta_{m_1, m_2}] = 0$ .

Из симметрии гамильтониана вытекает, что спектр электрона не зависит от азимутального угла  $\varphi$ . Поэтому можно выбрать направление поля так, чтобы проекция поля на плоскость  $xOy$  лежала на оси  $Ox$ . Тогда, используя свойства сферических гармоник, после громоздких, но простых преобразований найдем

$$\begin{aligned} \langle l, m_1 | V_1 + V_3 | l, m_2 \rangle = & \delta_{m_1, m_2} \left\{ b_z m_1 - 2\beta \frac{2(l+1)^2(l^2 - m_1^2) + m_1^2(2l-1)}{(2l-1)(2l+3)} \right\} + \\ & + \frac{1}{2} a_+(l, m_2) b_x \delta_{m_1, m_2+1} + \frac{1}{2} a_-(l, m_2) b_x \delta_{m_1, m_2-1}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $a_{\pm}(l, m) = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}$ .

Как следует из (2.5), матрица  $\langle l, m_1 | V_1 + V_3 | l, m_2 \rangle$  является эрмитовой трехдиагональной матрицей (матрицей Якоби)  $(2l+1)$ -го порядка. В общем случае нахождение аналитического решения секулярного уравнения затруднительно, но в частном случае, когда поле  $B \parallel Oz$  матрица  $\langle l, m_1 | V_1 + V_3 | l, m_2 \rangle$  является диагональной и

$$\varepsilon_1 = b_z m - 2\beta \frac{2(l+1)^2(l^2 - m^2) + m^2(2l-1)}{(2l-1)(2l+3)}. \quad (2.6)$$

Если отбросить поправки, обусловленные возмущениями  $V_2$  и  $V_4$  как малые высшего порядка малости, то

$$E_{l,m} = \frac{\hbar^2}{2m^* R^2} \left\{ l(l+1) + b_z m - 2\beta \frac{2(l+1)^2(l^2 - m^2) + m^2(2l-1)}{(2l-1)(2l+3)} \right\}. \quad (2.7)$$

Из (2.7) можно сделать определенные выводы о влиянии несферичности на вырождение уровней энергии электронов. Рассмотрим совокупность уровней с одинаковым орбитальным моментом  $l$ . Эти уровни образуют электронную оболочку. Отметим, что для сферы при нулевом поле все уровни оболочки вырождаются в один уровень. Если формально положить в (2.7)  $B = 0$ , получим, что деформация сферы в эллипсоид

вращения снимает частично вырождение по  $m$  уровней оболочки и расщепляет  $(2l + 1)$ -кратно вырожденный уровень на  $l + 1$  уровней, которые дважды вырождены при  $m \neq 0$  (уровень с  $m = 0$  невырожден). Заметим, что деформационное слагаемое в первой поправке к энергии при любых значениях квантовых чисел  $l$  и  $m$  всегда отрицательно. Как следует из (2.7), уровни одной оболочки при  $\mathbf{B} \neq 0$  невырожденные (т.е. поле снимает вырождение), причем энергия уровней с  $m > 0$  увеличивается с ростом поля, с  $m < 0$  — уменьшается, а уровень с  $m = 0$  не изменяется с изменением поля. Условие применимости формул (2.5) и (2.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \max(|b_x|, |b_y|, |b_z|, \beta) &\ll 1, \\ \max(|b_x|, |b_y|, |b_z|) &\sim \beta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь второе условие необходимо, так как если деформационная и магнитная поправки не одного порядка, то необходимо учитывать высшие порядки теории возмущений.

Рассмотрим теперь второй случай, когда деформационная поправка много больше магнитной, то есть когда  $\beta \gg \max|b_j|$ . В этом случае, возмущения  $V_2$  и  $V_3$  учитываем во втором порядке теории возмущений, а возмущение  $V_4$  квадратичное по полю можно отбросить.

Используя стандартную технику нахождения поправок к спектру для случая возмущения вырожденного спектра, получим после громоздких преобразований

$$E_{lm} = \frac{\hbar^2}{2m^*R^2} [l(l + 1) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2], \quad (2.9)$$

где

$$\varepsilon_1 = -2\beta \frac{2(l + 1)^2(l^2 - m^2) + m^2(2l - 1)}{(2l - 1)(2l + 3)},$$

а  $\varepsilon_2$  равно

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 = & b_z m + \beta^2 \frac{2(l + 1)^2(l^2 - m^2) + m^2(2l - 1)}{(2l - 1)(2l + 3)} + \\ & + 2\beta^2 \left\{ \frac{(l - 2)^2(l + 1)^2[(l - 1)^2 - m^2](l^2 - m^2)}{(2l - 3)(2l - 1)^3(2l + 1)} - \right. \end{aligned}$$

$$\left. - \frac{l^2(l+3)^2[(l+2)^2 - m^2][(l+1)^2 - m^2]}{(2l+1)(2l+3)^3(2l+5)} \right\}.$$

Отметим, что в (2.9) нельзя отбросить слагаемые порядка  $\beta^2$ . Действительно, если мы отбросим эти слагаемые, то мы вынуждены не учитывать зависимость спектра от поля, так как  $|b_z| \sim \beta^2$ . Поэтому, в этом приближении магнитный момент системы равен нулю.

Спектр в этом случае зависит лишь от проекции поля на ось  $Oz$ ,  $E_{lm} \sim |\mathbf{B}| \cos \vartheta$ . Из условия применимости результатов теории возмущений в этом случае ( $\beta \ll 1$ ,  $|b_z| \sim \beta^2$ ) ясно, что случай поперечного поля, когда поле почти перпендикулярно оси вращения эллипсоида, выходит за пределы применимости результатов этого расчета. Заметим, что учет поправки третьего порядка по степени эллипсоидальности (случай, когда  $|b_z| \sim \beta^3$ ) показывает, что она приводит к очень незначительному смещению всех уровней вниз по оси энергии.

Рассмотрим для полноты и третий случай, когда магнитная поправка много больше деформационной ( $\beta \ll \max |b_j|$ ). Пусть поправка в спектре, обусловленная  $V_1$  второго порядка относительно поправки, обусловленной возмущением  $V_3$ . В этом случае отбросим в гамильтониане слагаемое квадратичное по степени эллипсоидальности ( $V_2$ ). Выберем систему координат так, чтобы  $b_y = 0$ . Поправку первого порядка найдем из секулярного уравнения, не учитывая  $V_1$  и  $V_4$ . Для того, чтобы вычислить эту поправку удобно повернуть систему координат вокруг оси  $Oy$  на угол  $\vartheta_0 = \arccos(B_z/B)$  так, чтобы в новой системе координат  $B = B_z$ , то есть связь между штрихованной системой координат и исходной описывается формулами

$$\begin{cases} \xi' = \cos \vartheta_0 \xi - \sin \vartheta_0 \zeta, \\ \eta' = \eta, \\ \zeta' = \sin \vartheta_0 \xi + \cos \vartheta_0 \zeta. \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда в этой системе координат  $\tilde{V}_3 = bl_{\zeta'}$  и, следовательно,  $\varepsilon_1 = bm$ , а соответствующая правильная волновая функция  $|l, m\rangle$ . Используя технику вычисления матричных элементов возмущения, основанную на ор-

тогональных проекторах [152], нетрудно записать в повернутой системе координат

$$\varepsilon_2 = \langle l, m | \tilde{V}_1 | l, m \rangle + \langle l, m | \tilde{V}_3 Q \tilde{V}_3 | l, m \rangle + \langle l, m | \tilde{V}_4 | l, m \rangle, \quad (2.11)$$

где  $\tilde{V}_1$ ,  $\tilde{V}_3$  и  $\tilde{V}_4 = (b^2/4) \sin^2 \vartheta$  — возмущения в повернутой системе координат, а

$$Q = \sum_{l' \neq l} \frac{\sum_{m'} |l', m'\rangle \langle l', m'|}{\mathcal{E}_l^0 - \mathcal{E}_{l'}^0}. \quad (2.12)$$

После довольно громоздких преобразований получим выражение для спектра эллипсоида вращения в случае большей магнитной поправки с точностью до второго порядка теории возмущений имеет вид

$$E_{l,m} = \mathcal{E}^{sph} - \frac{\hbar^2 \beta}{2m^* R^2} \left[ 3 \sin^2 \vartheta_0 \frac{2l^2 + 2l + 3}{(2l-1)(2l+3)} \left( m^2 - \frac{1}{3} l(l+1) \right) + 2 \frac{2(l+1)^2(l^2 - m^2) + m^2(2l-1)}{(2l-1)(2l+3)} \right], \quad (2.13)$$

где спектр сферы с точностью до членов второго порядка по полю

$$\mathcal{E}^{sph} = \frac{\hbar^2}{2m^* R^2} \left[ l(l+1) + bm + \frac{b^2 l^2 + l - 1 + m^2}{2(2l-1)(2l+3)} \right]. \quad (2.14)$$

Условием применимости этого результата, как следует из вышеизложенного, является выполнение неравенств  $|b| \ll 1$ ,  $\beta \sim b^2$ . Отметим, что деформационная поправка меньше нуля при любых значениях квантовых чисел  $l$  и  $m$ . Рассмотрим зависимость спектра от угла наклона поля  $\vartheta_0$ . Из (2.13) следует, что спектр симметричен относительно точки, где  $\vartheta_0 = \pi/2$  из-за симметрии системы относительно плоскости  $xOy$ . Заметим, что при меньших значениях  $B$  спектр сильнее зависит от угла наклона поля к оси вращения эллипсоида, что обусловлено увеличением вклада в общую энергию электронов  $E_{l,m}$  слагаемого в уравнении (2.13), зависящего от  $\vartheta_0$ .

Введем угол  $\vartheta_1$  такой, что  $\sin^2 \vartheta_1 = 2/3$ . Из уравнения (2.13) видно, что при  $\vartheta_0 = \vartheta_1$  деформационная поправка к энергии не зависит от магнитного квантового числа  $m$ , и спектр эллипсоида совпадает со спектром сферы с точностью до небольшого сдвига всех уровней вниз:

$$E_{l,m}|_{\vartheta_0=\vartheta_1} = \mathcal{E}^{sphere} - \frac{\hbar^2}{3m^* R^2} \beta l(l+1). \quad (2.15)$$



Как следует из (2.13), при увеличении угла наклона поля  $\vartheta_0$  до  $\pi/2$  энергия уровней оболочки при  $m^2 < l(l+1)/3$  возрастает, а при  $m^2 > l(l+1)/3$  — убывает. Это обстоятельство определяет, какие из уровней оболочки имеют в точке  $\vartheta_0 = \pi/2$  максимумы, а какие минимумы. А именно, уровни оболочки с  $m^2 > l(l+1)/3$  имеют в зависимости  $E(\vartheta_0)$  в точке  $\vartheta_0 = \pi/2$  минимумы, а остальные максимумы.

## 2.2 Магнитный отклик

Найдем магнитный отклик  $\mathbf{M}(\mathbf{B})$  эллипсоида вращения, воспользовавшись стандартной формулой

$$M = -2 \sum_{l,m} \frac{\partial E_{l,m}}{\partial B} f_0(E_{l,m}). \quad (2.16)$$

Здесь двойка перед суммой по всем квантовым состояниям есть результат учета спинового вырождения энергетических уровней.

Будем различать два случая. Если эллипсоид находится в контакте с термостатом (есть обмен как энергии, так и частицами между эллипсоидом и термостатом), то зависимость  $\mu$  от поля  $B$  слаба и ее можно не учитывать. Действительно, пусть  $\mu = \mu_0 + \Delta\mu$ , где  $\mu_0$  — химический потенциал в отсутствии поля, а  $\Delta\mu$  — добавка, обусловленная полем  $B$ . Тогда, учитывая, что в состоянии теплового равновесия  $(\partial F/\partial\mu)_{\mu=\mu_0} = 0$ , для изменения свободной энергии  $\Delta F$  имеем

$$\Delta F = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \right)_{\mu=\mu_0} \cdot (\Delta\mu)^2. \quad (2.17)$$

Если учитывать, что  $\Delta\mu$  не зависит от направления поля, то  $\Delta\mu \sim B^2$  и, следовательно,  $\Delta F \sim B^4$  [153]. Однако при расчетах спектра магнитная поправка считалась с точностью до членов порядка  $B^2$ . Поэтому учет зависимости  $\mu$  от  $B$  был бы превышением точности.

Во втором случае система обменивается с термостатом только энергией (число частиц  $N$  постоянно). В этом случае зависимость  $\mu(B)$  играет

существенную роль и определяется условием нормировки

$$N = 2 \sum_{l,m} \frac{1}{1 + \exp[(E_{l,m} - \mu)/T]}. \quad (2.18)$$

В пределе при  $T \rightarrow 0$  магнитный момент равен

$$M(T = 0) = -2 \sum_{E_{l,m} \leq \mu} \frac{\partial E_{l,m}}{\partial B}. \quad (2.19)$$

Величина  $\partial E_{l,m}/\partial B$ , как следует из результатов предыдущего раздела, равна

$$\frac{\partial E_{l,m}}{\partial B} = \begin{cases} m\mu_B^*, & \text{в первом случае при } (B \parallel Oz) \\ & \text{и во втором случае,} \\ m\mu_B^* + b\mu_B^* \frac{l^2 + l - 1 + m^2}{(2l - 1)(2l + 3)}, & \text{в третьем случае,} \end{cases} \quad (2.20)$$

где  $\mu_B^* = |e|\hbar/2m^*c$  — эффективный магнетон Бора.

Исходя из уравнений (2.19) и (2.20), нетрудно получить формулы для магнитного момента при  $T = 0$  для всех рассматриваемых случаев:

в случае (1) (когда  $m_0 > 0$ )

$$\frac{M(T = 0)}{\mu_B^*} = (l_0 - m_0)(l_0 + m_0 + 1), \quad (2.21)$$

в случае (2)

$$\frac{M(T = 0)}{\mu_B^*} = |m_0| - m_0 \quad (2.22)$$

(здесь и далее, интервал изменения угла  $\vartheta_0$  достаточно взять равным  $(0, \pi/2)$ ),

в случае (3)

$$\begin{aligned} \frac{M(T = 0)}{\mu_B^*} &= (l_0 - m_0)(l_0 + m_0 + 1) - \frac{2b}{3}(l_0 + 1)^2 - \\ &- \frac{b m_0(m_0 + 1)(2m_0 + 1) - l_0(l_0 + 1)(2l_0 + 1) - 6(l_0 - m_0)(l_0^2 + l_0 - 1)}{3(2l_0 - 1)(2l_0 + 3)}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $l_0, m_0$  — квантовые числа верхнего занятого уровня. В уравнения (2.21)–(2.23) степень эллипсоидальности  $\beta$  не входит явно. Тем не менее,

магнитный момент зависит от  $\beta$ . Примем во внимание, что  $l_0$  и  $m_0$  определяются из условия  $\mu = E_{l_0 m_0}$ , где  $E_{lm}$  определяется или уравнением (2.7) (случай (1)), или уравнением (2.9) (случай (2)), или уравнением (2.13) (случай (3)). Тогда в случае  $\mu = const$  квантовые числа  $l_0$  и  $m_0$ , а значит и  $M$  зависят от  $\beta$ , так как  $E_{lm} = E_{lm}(\beta)$ .

Видно, что (2.22) не согласуется с (2.21) и (2.23). Объясним это различие с помощью графика зависимости спектра электронов системы от поля, который представлен на Рис. 2.1 (отметим, что  $b = \Phi/2Phi_0$ , где  $\Phi$  — магнитный поток, проходящий через диаметрально сечение наноструктуры). Как видно из рисунка, в случае (2) вклад в магнитный

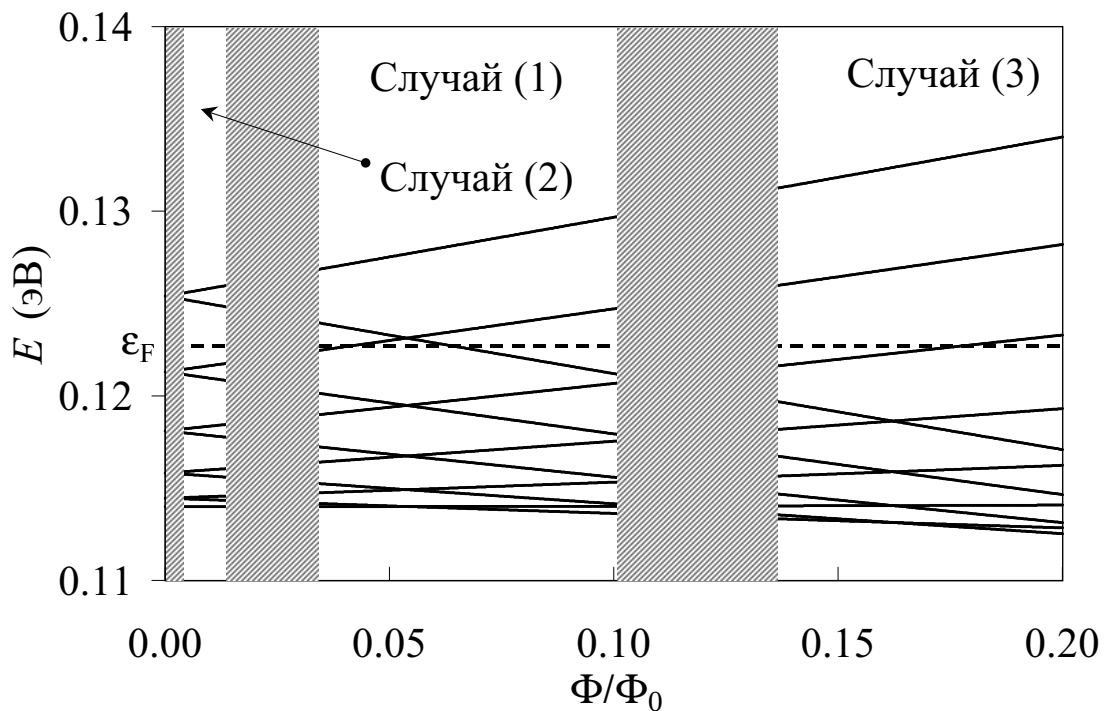


Рис. 2.1. Зависимость спектра электронов эллипсоида вращения при  $R = 10^{-7}$  см и  $\beta = 0.1$  в зависимости от магнитного поля для  $\vartheta_0 = 0$ . Заштрихованные области соответствуют случаям, когда неприменима теория возмущений.

момент может давать только наивысший занятый уровень (вклады других занятых уровней взаимно компенсируются). При переходе от случая (2) к случаям (1) и (3) относительное положение уровней изменяется. В этих случаях вклад в магнитный момент могут давать несколько уровней

верхней занятой оболочки. Таким образом, несмотря на то что зависимость спектра от поля для рассматриваемых случаев отличается только членами высших порядков, поведение магнитного момента будет разное в этих случаях.

Приведем результаты для сферы. Расчеты показывают, что если в спектре сферы (2.14) ограничиться линейными членами по полю, то формула для магнитного момента сферы совпадает с (2.21), если же считать спектр с точностью до членов второго порядка малости по полю, то магнитный момент сферы находится по формуле (2.23).

Необходимо отметить, что формулы (2.21), (2.22) и (2.23) справедливы как для случая постоянного химического потенциала  $\mu$ , так и для случая постоянного числа частиц  $N$ . Принципиальное различие этих случаев заключается в следующем. При  $\mu = const$  магнитный момент носит ступенчатый характер, так как с изменением поля верхний занятый или нижний не занятый уровень может пересечь энергию Ферми. Это обстоятельство приведет к изменению квантовых чисел  $l_0$  и  $m_0$ , и скачку магнитного момента, причем число скачков или ступенек строго ограничено. Конечность числа ступенек связана с тем, что, во-первых, энергию Ферми могут пересечь только уровни одной оболочки и, во-вторых, данное пересечение возможно либо уровнями с возрастающей энергией с ростом поля, либо, наоборот, уровнями с убывающей энергией с ростом поля. Строго говоря, для случая сферы (когда энергетический спектр вычисляется с точностью до членов второго порядка) и для случая (3) (когда магнитная поправка много больше деформационной) зависимость магнитного момента от поля не является классической ступенчатой зависимостью, так как магнитный момент линейно зависит от поля в области плато ступени (см. (2.23)). Тем не менее, когда геометрический конфайнмент намного сильнее магнитного, эта линейная зависимость  $M(B)$  пренебрежимо мала, и можно считать зависимость  $M(B)$  ступенчатой. С другой стороны, когда магнитный конфайнмент становится существенным по сравнению с

геометрическим, зависимость магнитного момента от поля ближе к пилообразной. Если же  $N = const$ , то квантовые числа  $l_0$  и  $m_0$  не меняют своего значения с ростом поля, так как нет случайного вырождения (пересечения) уровней в рассматриваемом интервале изменения магнитного поля, поэтому магнитный момент имеет непрерывный и монотонный характер: для случаев, когда деформационная поправка одного порядка и много больше магнитной поправки, магнитный момент от поля не зависит, а для случая, когда магнитная поправка много больше деформационной — линейно зависит от поля.

Рассмотрим случай, когда постоянен химический потенциал. Для сферы из вида спектра (2.14) следует, что  $E_{l,m}$  при  $m \geq 0$  растет с ростом  $B$ , а при  $m < 0$  — убывает. Поэтому, если  $\mu > E_{l_0,0}$ , то только уровни  $E_{l_0,m}$  с  $m \geq 0$  могут пересечь химический потенциал с ростом  $B$ , если же  $\mu < E_{l_0,0}$ , то только уровни с  $m < 0$ . Отметим, что в связи с малостью параметра  $b_z$  пересечения уровней в этой области нет. При пересечении уровня Ферми уровнями верхней оболочки с  $l = l_0$  возникают ступеньки в зависимости  $M(B)$ . Число этих ступенек, как ясно из вышесказанного равно числу возрастающих (убывающих) уровней верхней оболочки заполненной электронами, то есть возможное число ступеней равно  $l_0|_{B=0} + 1$ .

На Рис. 2.2 показаны графики зависимости  $M(B)$ . На этом рисунке при  $T = 0.1$  К видны четкие ступени магнитного момента, обусловленные пересечением химического потенциала и уровней верхней оболочки  $E_{l_0,m}$  сферы, а температура в 1 К полностью замыкает эти ступени.

Рассмотрим зависимость магнитного момента сферы от поля при постоянном числе частиц. Пусть  $T = 0$ . Тогда энергия Ферми равна энергии верхнего занятого уровня  $E_{l_0,m_0}$ , где квантовые числа  $l_0$  и  $m_0$  зависят от числа электронов  $N$  в системе. Как следует из (2.21) или из (2.23), магнитный момент сферы положителен и линейно зависит от поля (если считать спектр с точностью до членов второго порядка по полю) и при

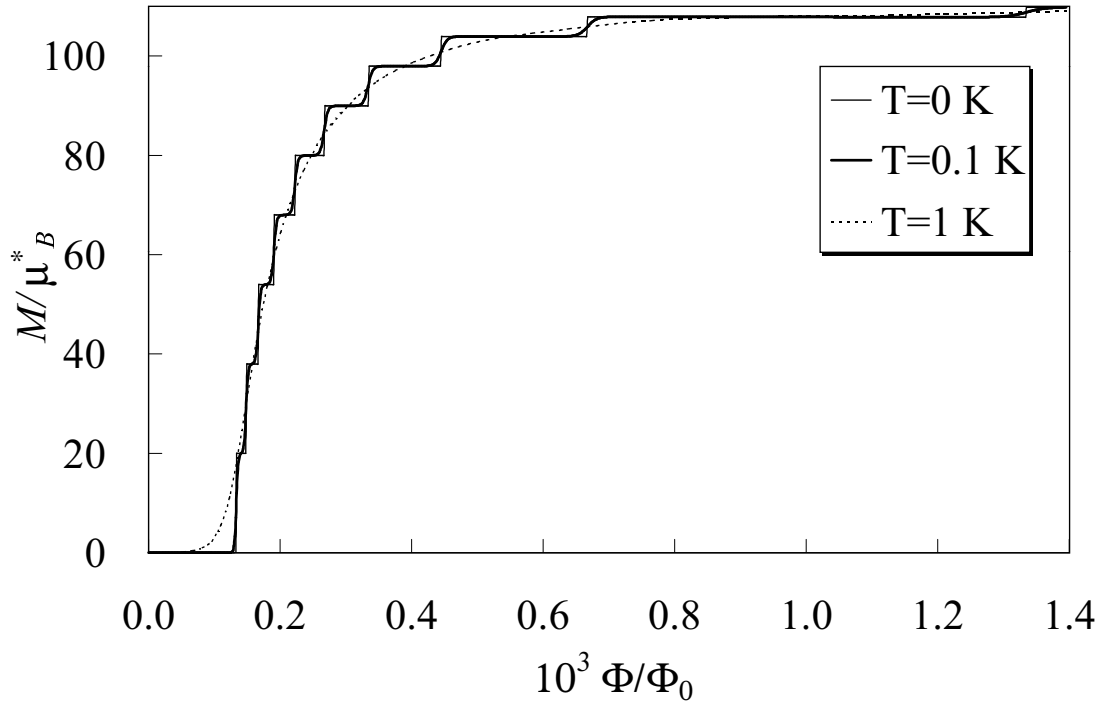


Рис. 2.2. Магнитный момент электронов сферы радиуса  $R = 3.5 \times 10^{-8}$  см в зависимости от магнитного поля при постоянном химическом потенциале  $\mu = 34.22$  эВ.

$B = 0$  имеет значение, равное целому числу  $\mu_B^*$ . Здесь имеется в виду левый предел функции  $M(B)$  в точке  $B = 0$ . Необходимо отметить, что зависимость  $M(B)$  является симметричной относительно  $B = 0$  (при нулевой температуре эта функция терпит разрыв в точке  $B = 0$ ). Таким образом, при ненулевой температуре магнитный момент всегда равен нулю в точке  $B = 0$ .

Для случая, когда  $T \neq 0$ , вначале необходимо найти зависимость  $\mu(B)$  из условия нормировки (2.18). Графики этой зависимости для разных температур показаны на Рис. 2.3. Из этого графика видно, что химический потенциал монотонно зависит от поля. Обсудим такое поведение химпотенциала. Как показано в [65], пересечение уровней (в области сильных полей) и изменение кратности вырождения уровней с ростом поля [120] приводят к осцилляционной зависимости химпотенциала от поля. Однако, в работе рассматривается случай слабого поля, при котором нет пересечения уровней. И так как кратность вырождения не меняется, то

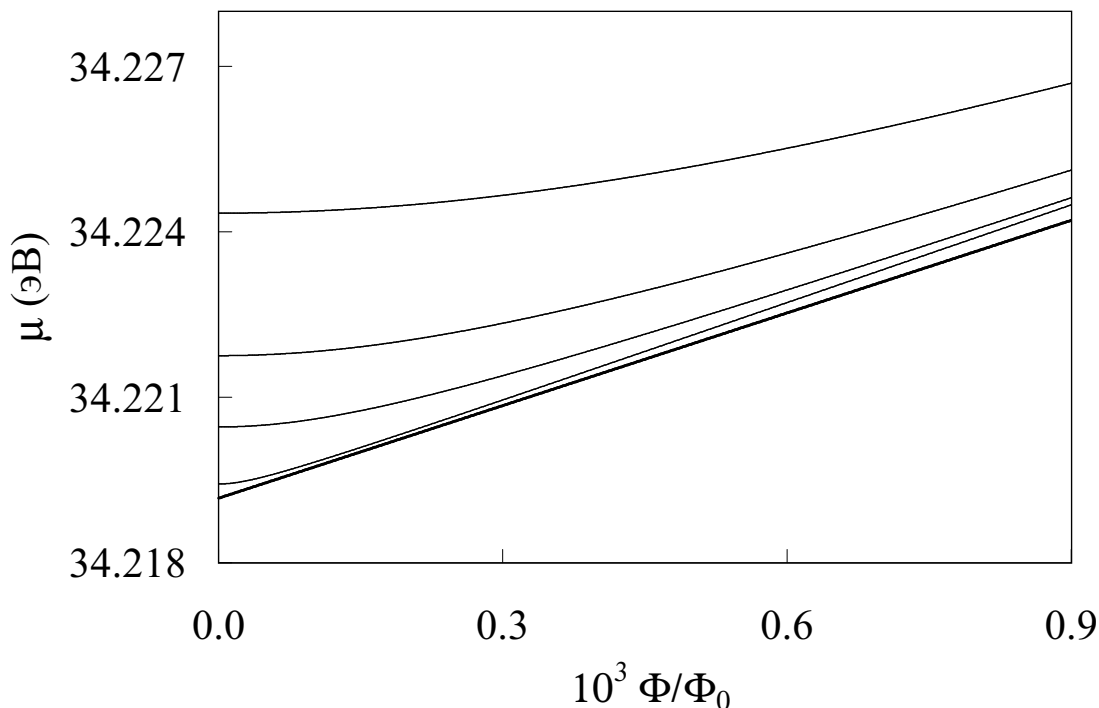


Рис. 2.3. Зависимость химического потенциала электронного газа сферы радиуса  $R = 3.5 \times 10^{-8}$  см от магнитного поля для  $T = 1, 5, 10, 20$  К при постоянном числе частиц  $N = 240$ . Жирная линия соответствует наивысшему занятому уровню  $E(l_0, m_0)$ .

химический потенциал будет монотонной функцией в рассматриваемой области изменения полей.

Как видно из Рис. 2.3, в области малых полей имеется участок кривой, где  $\mu(B)$  меняется медленно. Величина этого участка растет с увеличением температуры. Участок медленного изменения  $\mu(B)$  сменяется почти линейным ростом химического потенциала при бóльших полях. Как следует из (2.14), (2.16) и численного анализа, на участке медленного роста  $\mu(B)$  магнитный отклик возрастает, а на участке почти линейного роста  $\mu(B)$  магнитный отклик практически постоянен. Как показано на Рис. 2.4 при низких температурах (порядка 1 К) характер зависимости  $M(B)$  обусловлен поведением химического потенциала  $\mu(B)$ . Такая зависимость магнитного момента подобна размытой ступени. Отметим, что размытость ступени увеличивается при увеличении температуры, причем на всем рассматриваемом интервале изменения поля величина магнитного

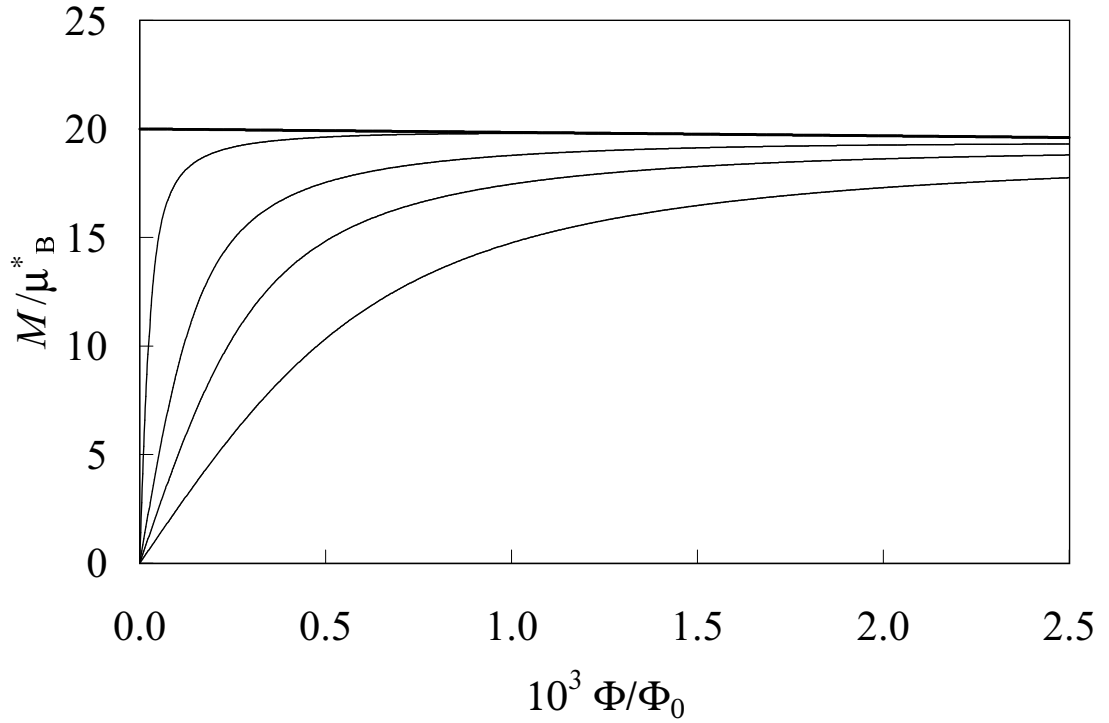


Рис. 2.4. Магнитный момент электронов сферы радиуса  $R = 3.5 \times 10^{-8}$  см в зависимости от магнитного поля для  $T = 1, 5, 10, 20$  К при постоянном числе частиц  $N = 240$ . Жирная линия соответствует нулевой температуре  $T = 0$ .

момента остается всегда меньше по значению, чем при  $T = 0$ . Ступеней в  $M(B)$ , связанных с пересечением  $E_{l_0, m}$  с  $\mu(B)$  нет, так как уровни  $E_{l, m}$  растут также почти линейно по полю как и химический потенциал. На Рис. 2.3 показана зависимость уровня  $E_{l_0, m_0}$ , лежащего сразу под химическим потенциалом, от поля.

Для эллипсоида вращения (по сравнению со сферой) поведение магнитного отклика для случая постоянного химического потенциала иное. Рассмотрим вначале ситуацию, когда деформационная поправка больше магнитной. Спектр в этом случае зависит лишь от  $z$ -компоненты поля  $B$ . Следовательно, компоненты магнитного отклика  $M_x$  и  $M_y$  равны нулю и отлична от нуля только компонента  $M_z$ . Как отмечалось ранее, энергию Ферми может пересечь лишь один уровень, и, следовательно, число ступеней в зависимости магнитного момента от поля не больше единицы. (Рис. 2.5)



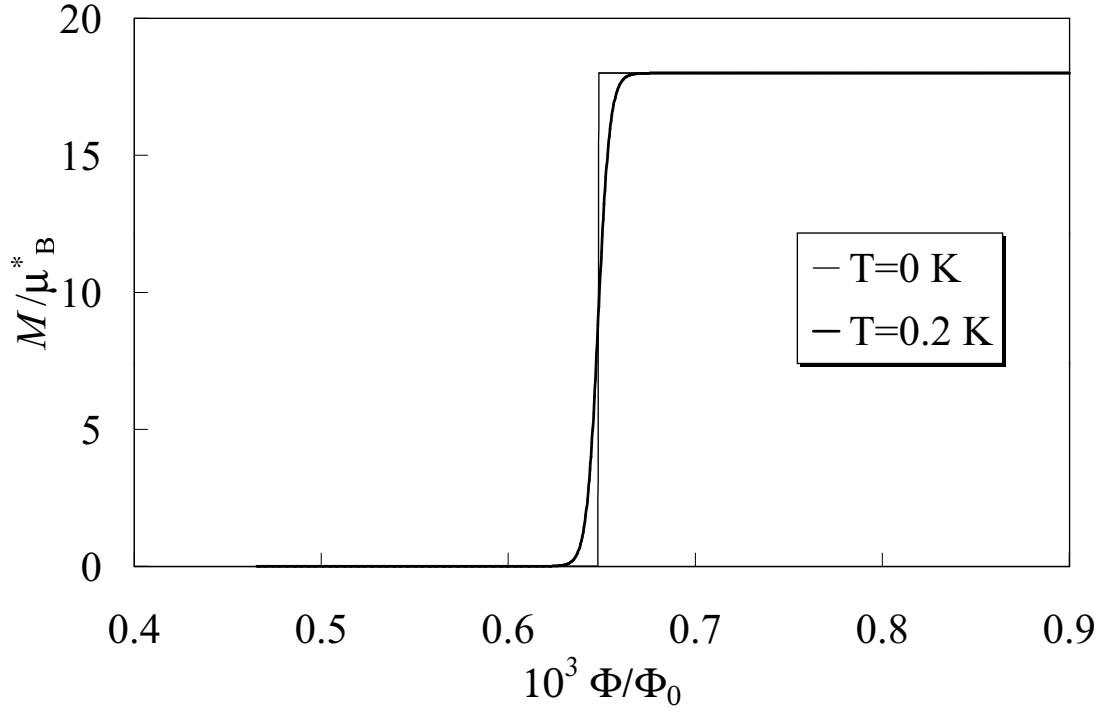


Рис. 2.5. Магнитный момент электронов эллипсоида вращения при  $R = 3.5 \times 10^{-8}$  см и  $\beta = 0.1$  (случай (2)) в зависимости от магнитного поля для  $\vartheta_0 = 0$  при постоянном химическом потенциале  $\mu = 39.507$  эВ.

В случае, когда деформационная поправка к спектру много меньше магнитной, магнитный момент носит пилообразный характер (Рис. 2.6). При одинаковом порядке поправок в продольном поле характер зависимости магнитного момента от поля сравним со случаем большей магнитной поправки относительно деформационной с той лишь разницей, что в формуле (2.21) не учитывается линейный член по полю (Рис. 2.7).

Если постоянно число частиц  $N$ , то качественная картина поведения  $M(B)$  для эллипсоида вращения аналогична случаю сферы. Для случая (2), когда деформационная поправка больше магнитной, магнитный момент при  $T = 0$  будет зависеть от кратности числа электронов, находящихся на верхней оболочке, а именно,  $M(B)|_{T=0} = 2|m_0|\mu_B^*$ , если число электронов на верхней оболочке кратно четырем и  $M(B)|_{T=0} = 0$  в противном случае. Это обстоятельство связано с зависимостью квантовых чисел  $l_0$  и  $m_0$  от общего числа электронов  $N$ . Для такого предельного

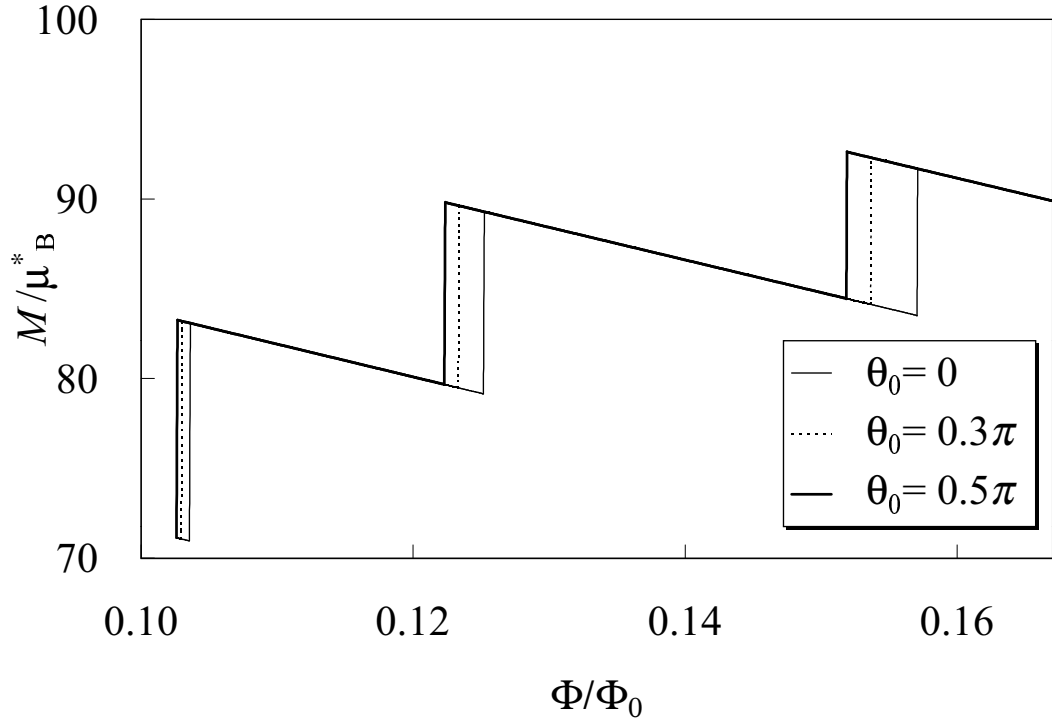


Рис. 2.6. Магнитный момент электронов эллипсоида вращения при  $R = 3 \times 10^{-7}$  см и  $\beta = 0.001$  (случай (3)) в зависимости от магнитного поля для  $T = 0$  К при постоянном химическом потенциале  $\mu = 0.5638$  эВ.

случая: (при  $\beta > 0$ )

$$N = 2 [l_0^2 + 2|m_0| + \Theta(m_0)], \quad (2.24)$$

(при  $\beta < 0$ )

$$N = 2 [l_0^2 + 2l_0 - 2|m_0| + 2 - \Theta(-m_0)]. \quad (2.25)$$

Ниже рассматривается случай вытянутого эллипсоида ( $\beta > 0$ ) (случай сжатого эллипсоида ( $\beta < 0$ ) рассматривается аналогичным образом). В (2.24)  $2l_0^2$  — число электронов на всех оболочках, кроме верхней, а  $2(2|m_0| + \Theta(m_0))$  — число электронов на верхней оболочке. Нетрудно заметить, что случай, когда  $N = 2(l_0 + 1)^2$ , соответствует замкнутой верхней оболочке, поэтому  $2l_0^2 < N \leq 2(l_0 + 1)^2$ . Из этого двойного неравенства однозначно определяется  $l_0$ . Если  $N - 2l_0^2$  — число кратное четырем, то  $m_0 < 0$ , следовательно, исходя из (26),  $M(B)|_{T=0} = 2|m_0|\mu_B^*$ , и согласно (28),  $m_0 = -(N - 2l_0^2)/4$ . Если же  $N - 2l_0^2$  — число не кратное четырем, то  $m_0 \geq 0$ , следовательно, исходя из (26)  $M(B)|_{T=0} = 0$ , и согласно (28),

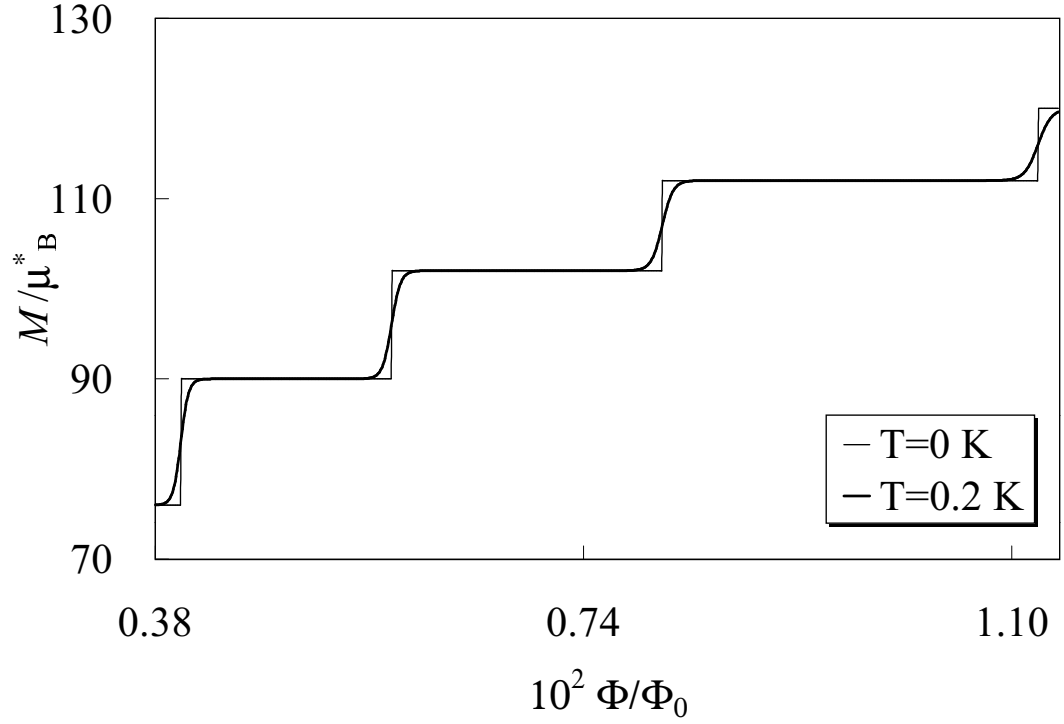


Рис. 2.7. Магнитный момент электронов эллипсоида вращения при  $R = 10^{-7}$  см и  $\beta = 0.001$  (случай (1)) в зависимости от магнитного поля для  $\vartheta_0 = 0$  при постоянном химическом потенциале  $\mu = 5.0292$  эВ.

$m_0 = (N - 2l_0^2 - 2)/4$ . Необходимо сказать, что если применить полученные результаты к фуллерену  $C_{70}$ , то магнитный момент  $C_{70}$  равен нулю, так как  $N = 280$ , поэтому квантовые числа  $l_0 = 11$   $m_0 = 9$ .

Для эллипсоида в случае (1) ( $B_z \parallel Oz$ ) и (3) характер зависимости магнитного момента от поля подобен случаю сферы. Причем, так как в случае (1) спектр линейно зависит от поля, то при  $T = 0$  магнитный момент не зависит от поля и исходя из (2.21), равен целому числу магнетонов Бора.

Квантовые числа  $l_0$ ,  $m_0$  для сферы и эллипсоида в обоих случаях одинаково зависят от  $N$ :

$$N = 2(l_0^2 + l_0 + m_0 + 1). \quad (2.26)$$

При использовании вышеописанного подхода, числа  $l_0$ , и  $m_0$  определяются однозначно.

Магнитный момент электронов на эллипсоиде вращения зависит

от угла  $\vartheta_0$  между осью вращения эллипсоида и направлением магнитного поля. Такая зависимость обусловлена зависимостью спектра  $E_{l,m}$  от  $\vartheta_0$  и  $B$ . В связи с этим, для случая постоянного числа частиц от  $\vartheta_0$  зависит химический потенциал эллипсоида, а в случае постоянного химического потенциала в зависимости от  $\vartheta_0$  может меняться число частиц.

Рассмотрим вначале зависимость  $M(\vartheta_0)$ , когда постоянен химический потенциал системы. Если деформационное возмущение много больше магнитного, то магнитный момент при  $0 < \vartheta_0 < \pi/3$  больше нуля, а при  $2\pi/3 < \vartheta_0 < \pi$  меньше нуля (напомним, что случай почти перпендикулярного оси вращения эллипсоида поля выходит за пределы применимости теории возмущений). Учитывая, что восприимчивость равна  $dM/dB$ , получим, что эллипсоид парамагнитен ( $\chi > 0$ ), на всем интервале от 0 до  $\pi$ . В случае много большей магнитной поправки магнитный момент при  $T = 0$  будет иметь скачкообразный характер, причем зависимость  $M(\vartheta_0)$  будет симметрична относительно  $\vartheta_0 = \pi/2$ . Как уже отмечалось в Разделе 2.1, зависимости  $E_{l,m}(\vartheta_0)$  одних уровней рассматриваемой оболочки в точке  $\vartheta_0 = \pi/2$  будут иметь минимум (для них выполняется неравенство  $m^2 > l(l+1)/3$ ), а зависимости других уровней этой же оболочки в этой точке будут иметь максимум (для них выполняется неравенство  $m^2 < l(l+1)/3$ ). Такой характер зависимости спектра от угла наклона поля к оси вращения эллипсоида влияет на зависимость  $M(\vartheta_0)$  следующим образом. Если на интервале  $(0, \pi/2)$  уровень увеличивает свою энергию, то, когда он на этом интервале пересекает энергию Ферми, значение магнитного момента скачком увеличивается. Если же энергию Ферми пересекает уровень, энергия которого уменьшается на этом интервале, то значение магнитного момента скачком уменьшается. Эти два случая показаны на Рис. 2.8.

В случае, когда постоянно число частиц, химический потенциал зависит от угла  $\vartheta_0$ . При низких температурах эта зависимость обусловлена в основном зависимостью верхнего занятого энергетического уровня

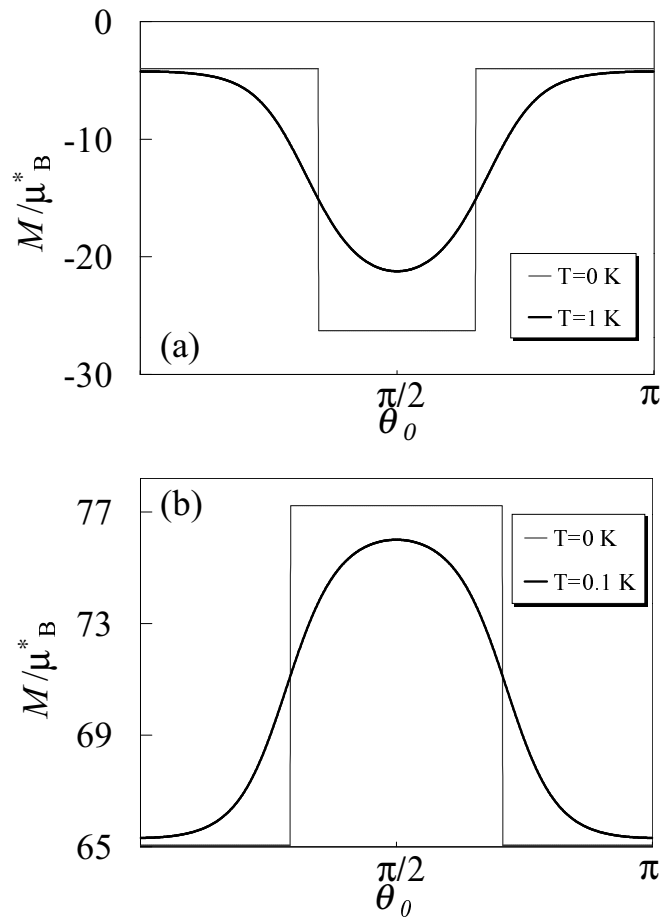


Рис. 2.8. Магнитный момент электронов эллипсоида вращения при  $R = 3 \times 10^{-7}$  см и  $\beta = 0.001$  (случай (3)) в зависимости от угла  $\vartheta_0$  для  $B = 20$  Тл, при постоянном химическом потенциале. (а) Уровень энергии с  $l = 11$ ,  $m = 11$  пересекает химический потенциал  $\mu = 0.5713$  эВ. (б) Уровень энергии с  $l = 11$ ,  $m = 6$  пересекает химический потенциал  $\mu = 0.56554$  эВ.

$E_{l_0, m_0}(\vartheta_0)$ . Графики этих зависимостей показаны на Рис. 2.9.

Рассмотрим зависимость магнитного момента эллипсоида от угла  $\vartheta_0$ , когда деформационная поправка много больше магнитной (постоянное число частиц). Здесь нас интересует случай, когда на верхней оболочке находятся число электронов кратное четырем, так как в противном случае  $M = 0$ . Исходя из (2.22) можно сделать вывод, что при  $\vartheta_0 < \pi/3$  магнитный момент больше нуля, а при  $\vartheta_0 > 2\pi/3$  — меньше нуля, т.е. зависимость  $M(\vartheta_0)$  в случае (2), когда число электронов кратно четырем, будет одинакова как для случая постоянного  $\mu$ , так и для случая постоянного  $N$  (Рис. 2.10).

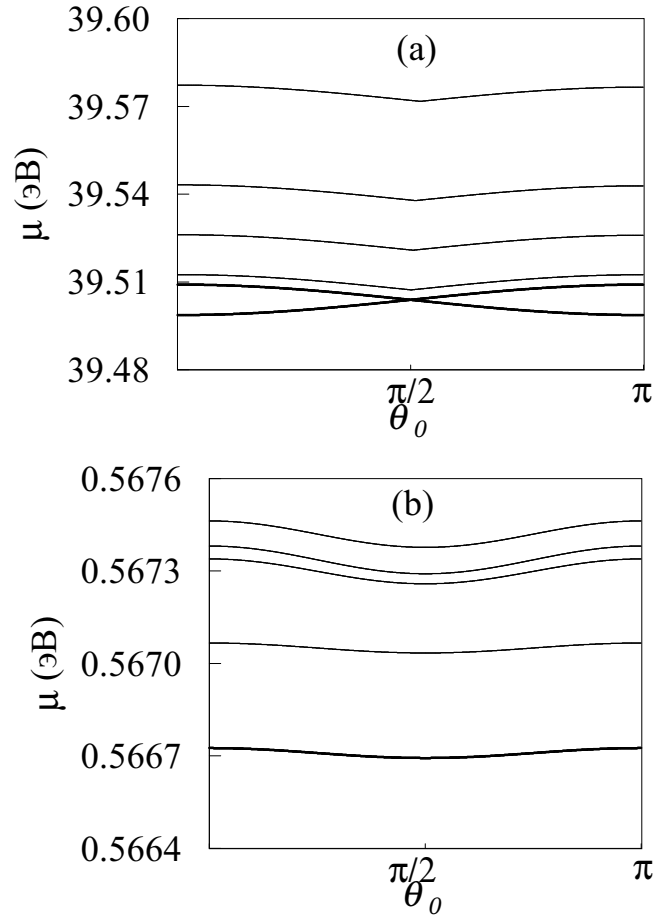


Рис. 2.9. (а) Химический потенциал электронного газа эллипсоида вращения при  $R = 3.5 \times 10^{-8}$  см и  $\beta = 0.1$  (случай (2)) в зависимости от угла  $\vartheta_0$  для  $T = 1, 5, 10, 20$  К и  $B = 10$  Тл при постоянном числе частиц  $N = 280$ . (б) Химический потенциал электронного газа эллипсоида вращения при  $R = 3 \times 10^{-7}$  см и  $\beta = 0.001$  (случай (3)) в зависимости от угла  $\vartheta_0$  для  $T = 0.1, 1, 15, 20$  К и  $B = 20$  Тл при постоянном числе частиц  $N = 280$ . Жирные линии соответствуют наивысшим занятым уровням.

Как видно из (2.23), в случае, когда магнитная поправка много больше деформационной, магнитный момент эллипсоида, при постоянном числе частиц и при  $T = 0$  не будет зависеть от угла  $\vartheta_0$  (в отличие от предыдущего случая), так как не меняются с изменением  $\vartheta_0$  квантовые числа  $l_0$  и  $m_0$ . При  $T \neq 0$  магнитный момент имеет слабую монотонную зависимость от угла  $\vartheta_0$  на отрезке  $(0, \pi/2)$ , обусловленную зависимостью энергетических уровней и химического потенциала от  $\vartheta_0$  (Рис. 2.11).

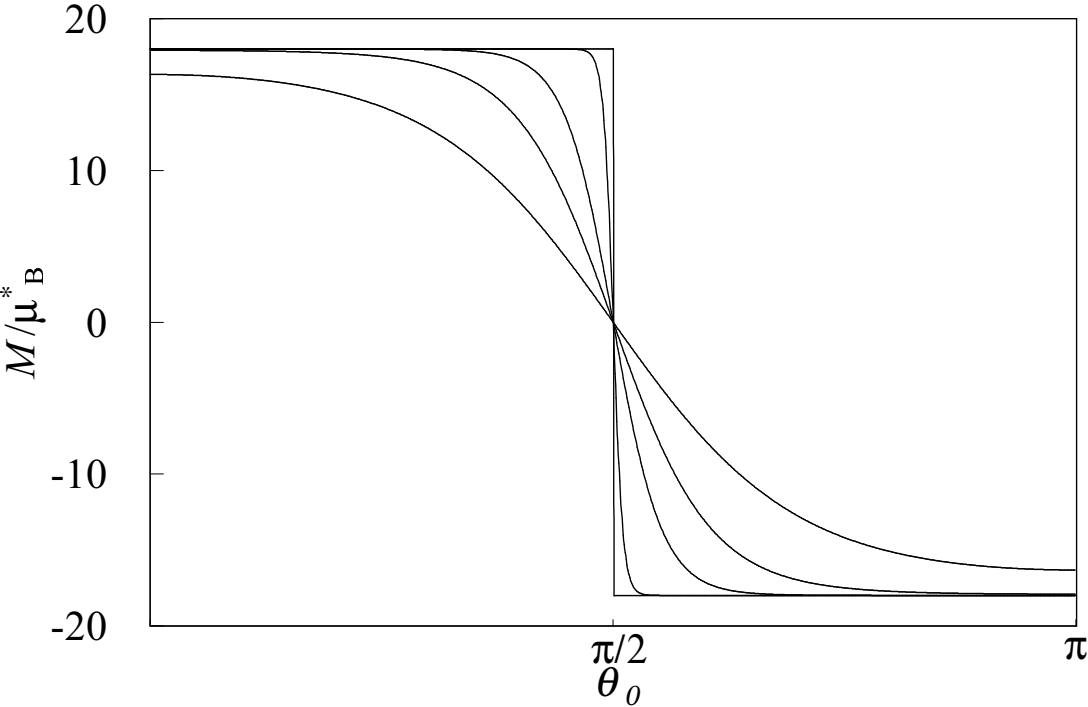


Рис. 2.10. Магнитный момент электронов эллипсоида вращения при  $R = 3.5 \times 10^{-8}$  см и  $\beta = 0.1$  (случай (2)) в зависимости от угла  $\vartheta_0$  для  $T = 0, 1, 5, 10, 20$  К и  $B = 10$  Тл при постоянном числе частиц  $N = 278$ .

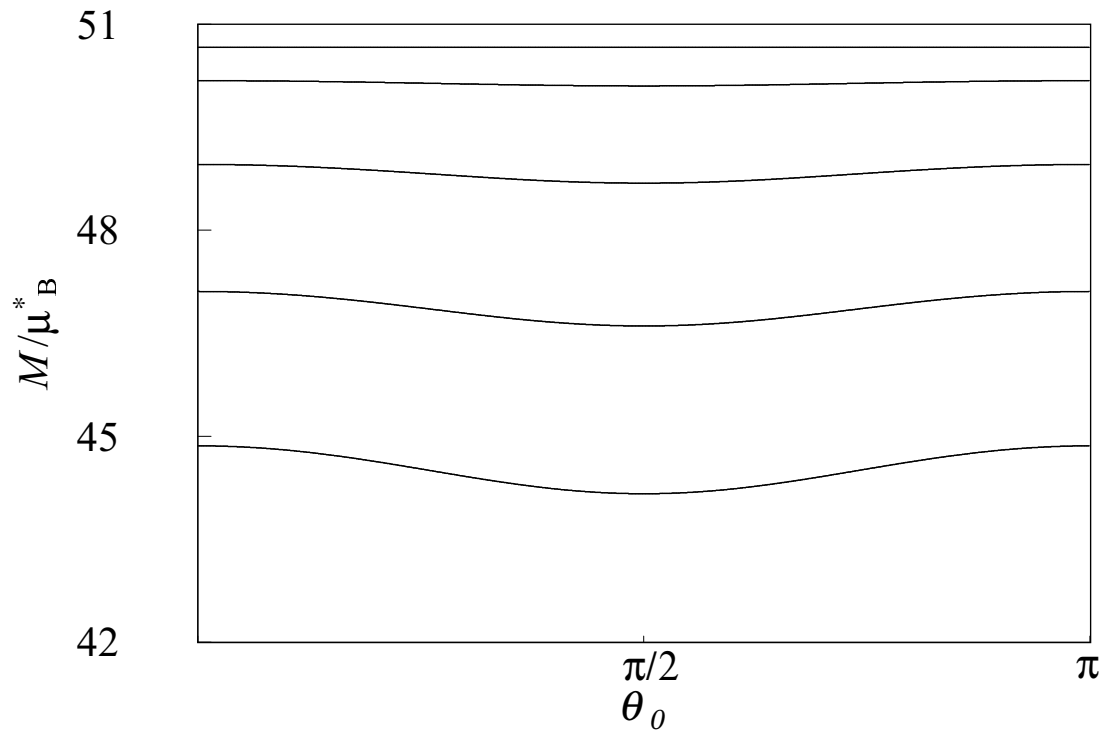


Рис. 2.11. Магнитный момент электронов эллипсоида вращения при  $R = 3 \times 10^{-7}$  см и  $\beta = 0.001$  (случай (3)) в зависимости от угла  $\vartheta_0$  для  $T = 0, 5, 10, 15, 20$  К и  $B = 20$  Тл при постоянном числе частиц  $N = 280$ .



## Глава 3

# Поглощение электромагнитного излучения наносферой

### 3.1 Оптические переходы электронов наносферы

Рассмотрим систему невзаимодействующих электронов, находящихся на поверхности наносферы. Собственные функции и собственные значения гамильтониана системы хорошо известны

$$\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) = Y_{l,m}(\vartheta, \varphi), \quad E_l = \frac{\hbar\Omega}{2}l(l+1),$$

где  $\Omega = \hbar/m^*R^2$ ,  $R$  — радиус сферы.

Поглощение электромагнитного излучения вырожденным электронным газом наносферы вычисляется по формуле (1.1). При вычислении матричных элементов оператора  $H_R$  (формула (1.2)) электромагнитное поле предполагается однородным, то есть считается, что длина волны фотона много больше радиуса сферы.

Направим ось  $Oz$  вдоль вектора поляризации фотона. Матричные элементы перехода в дипольном приближении имеют вид

$$\begin{aligned} \langle l', m', -\mathbf{k} | H_R | l, m, 0 \rangle &= \frac{|e|}{m^*} \sqrt{\frac{2\pi\hbar N_{\mathbf{k}}}{\varepsilon(\omega)\omega}} \langle l', m' | p_z | l, m \rangle = \frac{|e|\hbar}{m^*R} \sqrt{\frac{2\pi\hbar N_{\mathbf{k}}}{\varepsilon(\omega)\omega}} \delta_{m',m} \times \\ &\times \left[ (l+1) \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1}} \delta_{l',l-1} + l \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1}} \delta_{l',l+1} \right]. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Как следует из (3.1), в дипольном приближении переходы возможны только между соседними уровнями ( $l' = l \pm 1$ ).

Подставляя (3.1) в (1.1), получим

$$\Gamma = \frac{\pi e^2}{3cm^*R^2\sqrt{\varepsilon(\omega)}} \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=0}^{\infty} f_0(E_l)[1 - f_0(E_l + \hbar\omega)] \times \\ \times l(l+1) [(l+1)\delta(\omega + \Omega l) + l\delta(\omega - \Omega(l+1))]. \quad (3.2)$$

Из (3.2) видно, что зависимость  $\Gamma(\omega)$  имеет резонансный характер. Резонансы возникают при частотах электромагнитного излучения  $\omega = \Omega(l+1)$  для тех значений  $l$ , при которых  $f_0(E_l)[1 - f_0(E_l + \hbar\Omega(l+1))]$  не является малой величиной.

Для учета размытия резонансов рассеиванием введем лоренцевское уширение дельтообразных пиков по формуле

$$\delta_{\tau}(x) = \frac{(\pi\tau)^{-1}}{\tau^{-2} + x^2}, \quad (3.3)$$

где  $\tau$  — феноменологическое время релаксации. С учетом (3.3), выражение (3.2) можно записать в виде суммы двух слагаемых:  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , где

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} = \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_0(E_l)[1 - f_0(E_l + \hbar\omega)]l(l+1)^2}{1 + \tau^2(\omega + \Omega l)^2}, \\ \frac{\Gamma_2}{\Gamma_0} = \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_0(E_l)[1 - f_0(E_l + \hbar\omega)]l^2(l+1)}{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l+1)]^2}.$$

Здесь  $\Gamma_0 = e^2\tau/3cm^*R^2\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ .

Нерезонансный член  $\Gamma_1$  описывает процессы, связанные с эмиссией фотонов, причем вблизи точки резонанса  $\Gamma_1 = O(\Gamma_2/(\tau\omega)^2)$ . Поэтому, в случае высокочастотного поля, вкладом  $\Gamma_1$  в поглощение в окрестности резонанса можно пренебречь. Опустив нерезонансный член, получим

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{f_0(E_l)[1 - f_0(E_l + \hbar\omega)]l^2(l+1)}{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l+1)]^2}. \quad (3.4)$$

Из формулы (1.1) видно, что при достаточно низкой температуре в поглощении участвуют только те электроны, энергия которых находится в интервале  $[\mu - \hbar\omega, \mu]$ . Заметим, что при изменении частоты электромагнитного излучения уровень  $\mu - \hbar\omega$  может пересечься с энергетическим

уровнем электрона. В результате изменяется число электронов, участвующих в поглощении, и в зависимости поглощения  $\Gamma$  от частоты  $\omega$  возникает скачок.

Из условия возникновения скачков  $\mu - \hbar\omega = E_l$  находим, что скачки возникают при частоте электромагнитного излучения

$$\omega_{kink}(l) = \frac{\mu}{\hbar} - \frac{\Omega}{2}l(l+1). \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что расстояние между соседними скачками равно  $\omega_{kink}(l) - \omega_{kink}(l-1) = \Omega l$ .

Величину скачка  $\Delta_l$ , при близких к нулю температурах, можно оценить следующим выражением

$$\Delta_l \approx \Gamma_0 \frac{\Omega l^2(l+1)}{[\mu/\hbar - \Omega l(l+1)/2] \{1 + \tau^2[\mu/\hbar - \Omega(l+1)(l+2)/2]^2\}}. \quad (3.6)$$

Как известно, термодинамические свойства трехмерного электронного газа (например, диамагнетизм Ландау) практически не зависят от того постоянно число частиц в системе ( $N = const$ ) или постоянен химический потенциал ( $\mu = const$ ). Это обстоятельство, прежде всего, связано с тем, что влияние выбора способа описания системы на ее термодинамические свойства имеет порядок  $N^{-1/3}$  [154], и при очень большом числе частиц этим вкладом можно пренебречь.

В случае электронного газа на наносфере, число частиц в системе невелико, поэтому физические свойства наносферы существенно зависят от выбора способа описания системы [34]. В связи с этим, ниже рассмотрим два случая: случай постоянного химического потенциала и случай постоянного числа электронов на сфере, и проведем детальный анализ различий в поглощении между этими случаями.

Рассмотрим сначала случай, когда сфера находится в контакте с резервуаром, имеющим химический потенциал  $\mu$  и температуру  $T$ .

Для дальнейшего анализа удобно ввести квантовое число  $l_0$ , такое что  $E_{l_0} \leq \mu < E_{l_0+1}$ . При нулевой температуре  $l_0$  есть орбитальное квантовое число верхнего занятого электронами уровня, и резонанс в поглощении возникает при переходах электронов с  $l_0$ -го уровня на  $(l_0 + 1)$ -й

при частоте электромагнитного излучения, равной  $\Omega(l_0 + 1)$  (сплошная линия на Рис. 3.1). При увеличении температуры вклад электронных пе-

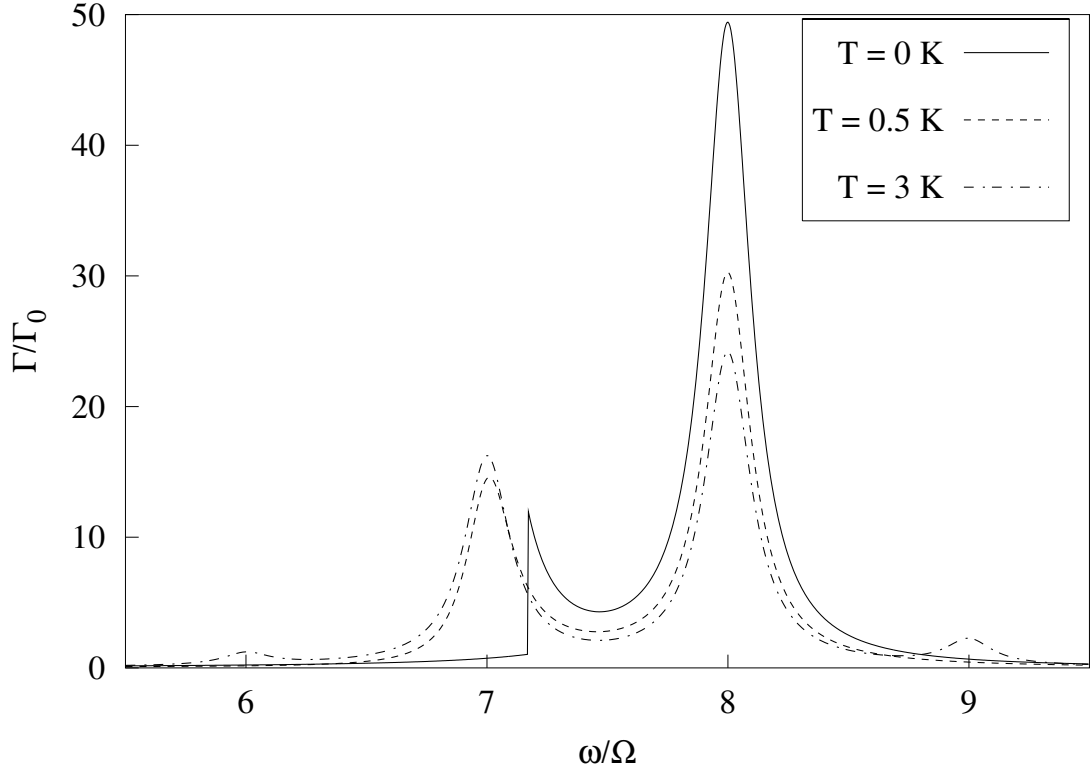


Рис. 3.1. Возникновение новых резонансных пиков на кривой поглощения с ростом температуры;  $R = 10^{-5}$  см,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с,  $\mu = 5.15 \times 10^{-15}$  эрг.

реходов с  $(l_0 - 1)$ -го уровня на  $l_0$ -й в поглощение становится существенным и возникает резонансный пик при частоте, равной  $\Omega l_0$  (пунктирная линия на Рис. 3.1). При дальнейшем росте температуры возникают максимумы в поглощении при переходах электронов с  $(l_0 - 2)$ -го уровня на  $(l_0 - 1)$ -й или с  $(l_0 + 1)$ -го на  $(l_0 + 2)$ -й (штрихпунктирная линия на Рис. 3.1) и так далее.

Оценим интенсивности первого (при  $\omega = \Omega l_0$ ) и второго (при  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$ ) пиков

$$\Gamma(\omega = \Omega l_0) = \Gamma_0 \left( 1 - e^{-\hbar \Omega l_0 / T} \right) f_0(E_{l_0-1}) [1 - f_0(E_{l_0})] (l_0 - 1)^2 + O(1/(\tau \Omega)^2), \quad (3.7)$$

$$\Gamma(\omega = \Omega(l_0 + 1)) = \Gamma_0 \left( 1 - e^{-\hbar \Omega(l_0+1) / T} \right) f_0(E_{l_0}) [1 - f_0(E_{l_0+1})] l_0^2 + O(1/(\tau \Omega)^2). \quad (3.8)$$

Отметим, что с увеличением температуры интенсивность наибольшего пика (при  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$ ) уменьшается, а интенсивности остальных пиков увеличиваются.

При  $T = 0$  К на Рис. 3.1 виден скачок, соответствующий пересечению шестого электронного энергетического уровня с  $\mu - \hbar\omega$ . Как видно из рисунка, температура в 0.5 К полностью замыкает этот скачок. Следующие два скачка, возникающие на правом крыле второго резонансного пика вследствие пересечения уровня  $\mu - \hbar\omega$  пятым и четвертым энергетическими уровнями, показаны на Рис. 3.2. Из этого рисунка видно, что

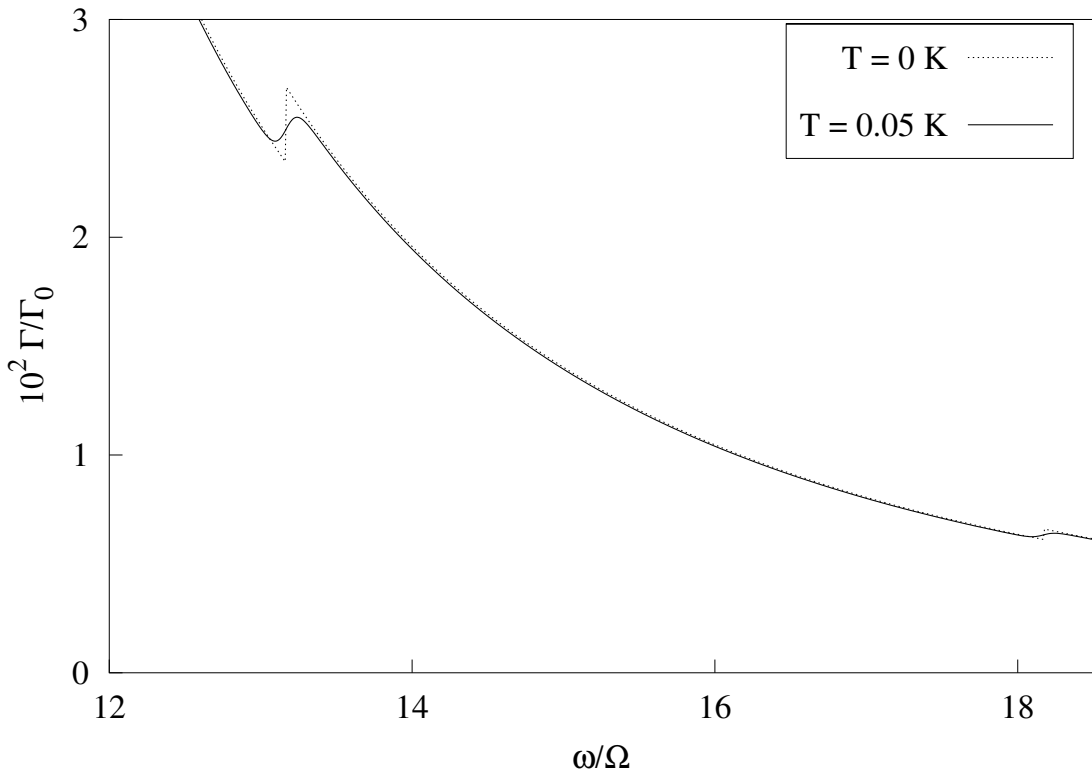


Рис. 3.2. Температурное размытие скачков на правом крыле второго резонансного пика;  $R = 10^{-5}$  см,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с,  $\mu = 5.15 \times 10^{-15}$  эрг.

с увеличением температуры положение скачков не изменяется, и даже небольшое увеличение температуры приводит к заметному сглаживанию скачков.

Рассмотрим скачок, соответствующий пересечению уровня  $E_{l_0-1}$  с  $\mu - \hbar\omega$ . Из (3.6) и (3.5) следует, что чем ближе химический потенциал к электронному энергетическому уровню  $E_{l_0}$  тем ближе  $\omega_{kink}$  к  $\Omega l_0$  и

тем больше величина скачка. Так при  $\mu \approx E_{l_0}$  величина скачка равна  $\Gamma_0(l_0 - 1)^2$  (Рис. 3.3). Отметим, что при изменении величины химического

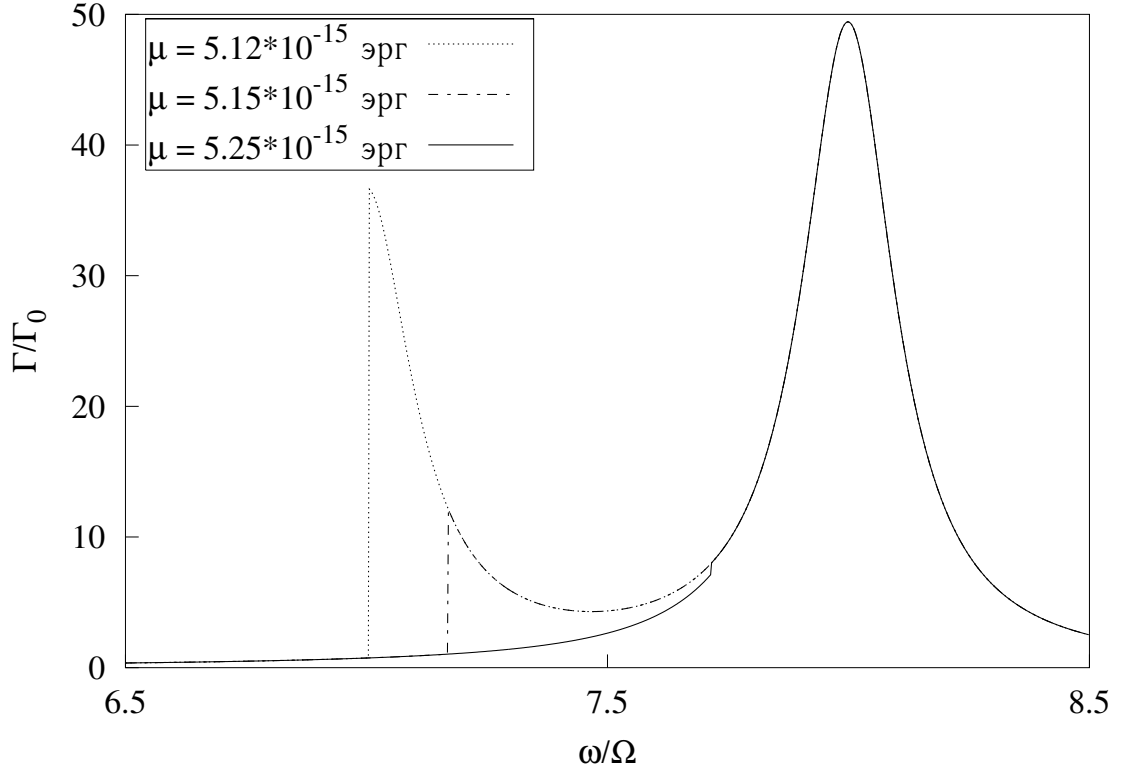


Рис. 3.3. Изменение положения и величины скачка на кривой поглощения при разных значениях химического потенциала. Показан скачок, возникающий при пересечении уровня  $E_{l_0-1}$  с  $\mu - \hbar\omega$ ;  $R = 10^{-5}$  см,  $T = 0$  К,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с.

потенциала изменяются только положение и величина скачка, поэтому по обе стороны от скачков кривые поглощения совпадают. Как видно из (3.6), величина других скачков  $\Delta_l$  уменьшается с уменьшением  $l$  (Рис. 3.2).

Оценим поглощение при нулевой температуре. В области частот электромагнитного излучения близких к резонансной частоте, равной  $\Omega(l_0 + 1)$ , в уравнении (3.4) существенны только два слагаемых с  $l = l_0 - 1$  и  $l = l_0$ . Тогда, оставляя в (3.4) только эти слагаемые и устремив температуру к нулю, получим

$$\frac{\Gamma(T = 0)}{\Gamma_0} \approx \frac{\Omega}{\omega} \left[ \frac{l_0^2(l_0 + 1)}{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l_0 + 1)]^2} + \frac{(l_0 - 1)^2 l_0}{1 + \tau^2(\omega - \Omega l_0)^2} \Theta(E_{l_0-1} + \hbar\omega - \mu) \right]. \quad (3.9)$$

В формуле (3.9) первое слагаемое описывает резонансный пик в поглощении, возникающий при частоте  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$ , а второе слагаемое

описывает скачок, возникающий при частоте  $\omega = \mu/\hbar - \Omega(l_0 - 1)l_0/2$ . Из (3.9) следует, что при частоте электромагнитного излучения равной  $\Omega l_0$  в поглощении нет резонанса при  $T = 0$ . Это связано с тем, что при нулевой температуре уровень  $E_{l_0}$  является заполненным ( $f_0(E_{l_0}) = 1$ ), поэтому переходы электронов с уровня  $E_{l_0+1}$  на  $E_{l_0}$  невозможны. Увеличение температуры приводит к появлению резонансного пика при частоте, равной  $\Omega l_0$  (за счет множителя  $[1 - f_0(E_{l_0})]$  в (3.7)) (Рис. 3.1).

Из (3.8) видно, что при  $T = 0$  интенсивность пика при частоте  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$  будет наибольшей, так как  $f_0(E_{l_0})[1 - f_0(E_{l_0+1})] = 1$ . Поэтому из (3.9) получим

$$\frac{\Gamma(\omega = \Omega(l_0 + 1))}{\Gamma_0} = l_0^2 + \frac{(l_0 - 1)^2 l_0}{(l_0 + 1)(1 + \tau^2 \Omega^2)} \Theta(E_{l_0} + \hbar\Omega - \mu), \quad (3.10)$$

где учтено, что  $E_{l_0-1} + \hbar\Omega(l_0 + 1) = E_{l_0} + \hbar\Omega$ . Как следует из этой формулы, при  $\mu < E_{l_0} + \hbar\Omega$  ( $(l_0 - 1)$ -й скачок находится левее резонансной частоты  $\Omega(l_0 + 1)$ ) интенсивность пика поглощения при нулевой температуре и частоте электромагнитного излучения  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$  имеет вид

$$\frac{\Gamma(\omega = \Omega(l_0 + 1))}{\Gamma_0} = l_0^2 + \frac{(l_0 - 1)^2 l_0}{(l_0 + 1)(1 + \tau^2 \Omega^2)}, \quad (3.11)$$

а при  $\mu > E_{l_0} + \hbar\Omega$  (скачок с номером  $l_0 - 1$  находится правее резонансной частоты  $\Omega(l_0 + 1)$ )

$$\Gamma(\omega = \Omega(l_0 + 1)) = \Gamma_0 l_0^2.$$

С ростом температуры множитель  $f_0(E_{l_0})[1 - f_0(E_{l_0+1})]$  в (3.8) уменьшается, следовательно, уменьшается интенсивность пика поглощения (Рис. 3.1).

Отметим, что величины резонансных частот полностью определяются химическим потенциалом и радиусом сферы. Действительно, из (3.4) видно, что при низкой температуре резонансы возникают при частотах  $\Omega l_0$  и  $\Omega(l_0 + 1)$ , то есть их положения зависят от  $R$  и  $l_0$ , последняя, в свою очередь, определяется химическим потенциалом.

Рассмотрим теперь случай изолированной сферы. В этом случае число электронов в системе  $N = const$  и химический потенциал опреде-

ляется из условия нормировки. На Рис. 3.4 приведены графики зависимостей  $\mu$  от  $N$  при различных значениях температуры. Из этих графиков

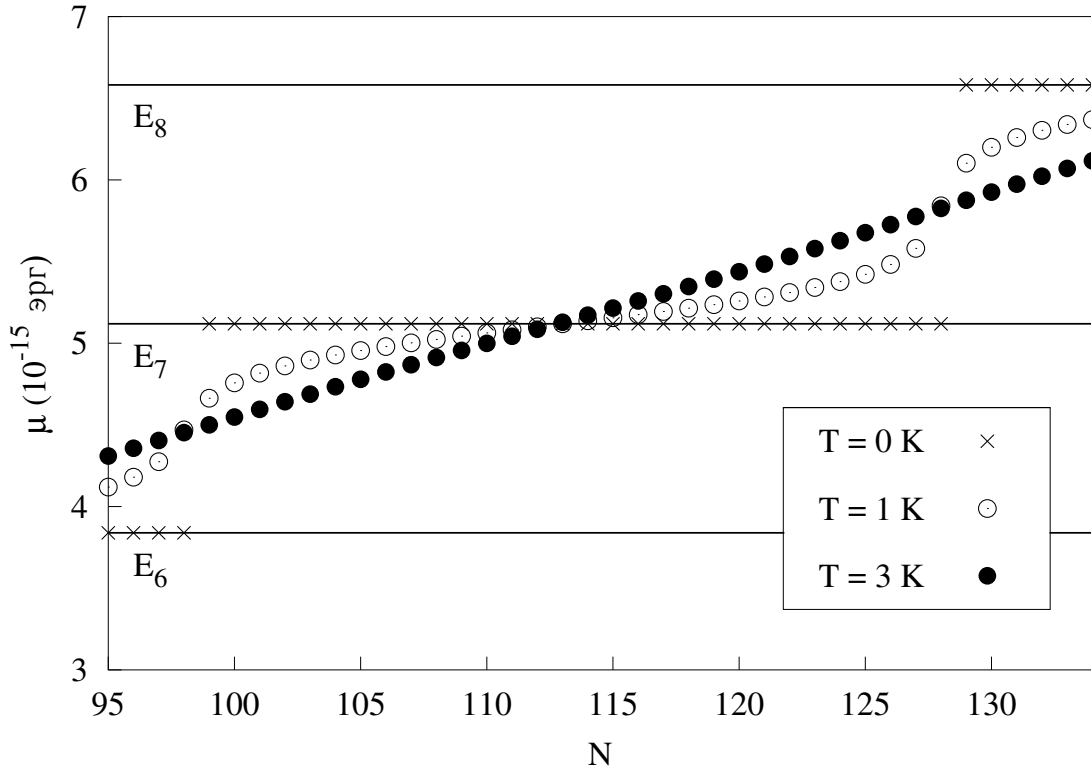


Рис. 3.4. Зависимость химического потенциала системы от числа электронов на сфере радиуса  $R = 10^{-5}$  см.

видно, что при  $T \approx 0$  К химический потенциал располагается очень близко к верхнему занятому уровню. Если электронный уровень  $E_{l_0}$  заполнен меньше чем на половину ( $N - 2l_0^2 < 2l_0 + 1$ ), то  $\mu < E_{l_0}$ . Если число электронов на уровне  $E_{l_0}$  больше половины кратности вырождения этого уровня ( $N - 2l_0^2 > 2l_0 + 1$ ), то  $\mu > E_{l_0}$ . В случае, когда изменение числа электронов в системе приводит к изменению квантового числа  $l_0$ , в зависимости  $\mu(N)$  происходит резкий скачок при  $T \approx 0$ . Как следует из Рис. 3.4, температура в 1 К заметно сглаживает ступенчатую зависимость, а температура в 3 К полностью замыкает ступени и приводит к почти линейной зависимости  $\mu(N)$ .

Графики зависимостей химического потенциала от температуры показаны на Рис. 3.5. Отметим, что если уровень  $E_{l_0}$  заполнен меньше чем на половину ( $N - 2l_0^2 < 2l_0 + 1$ ), то химический потенциал являет-



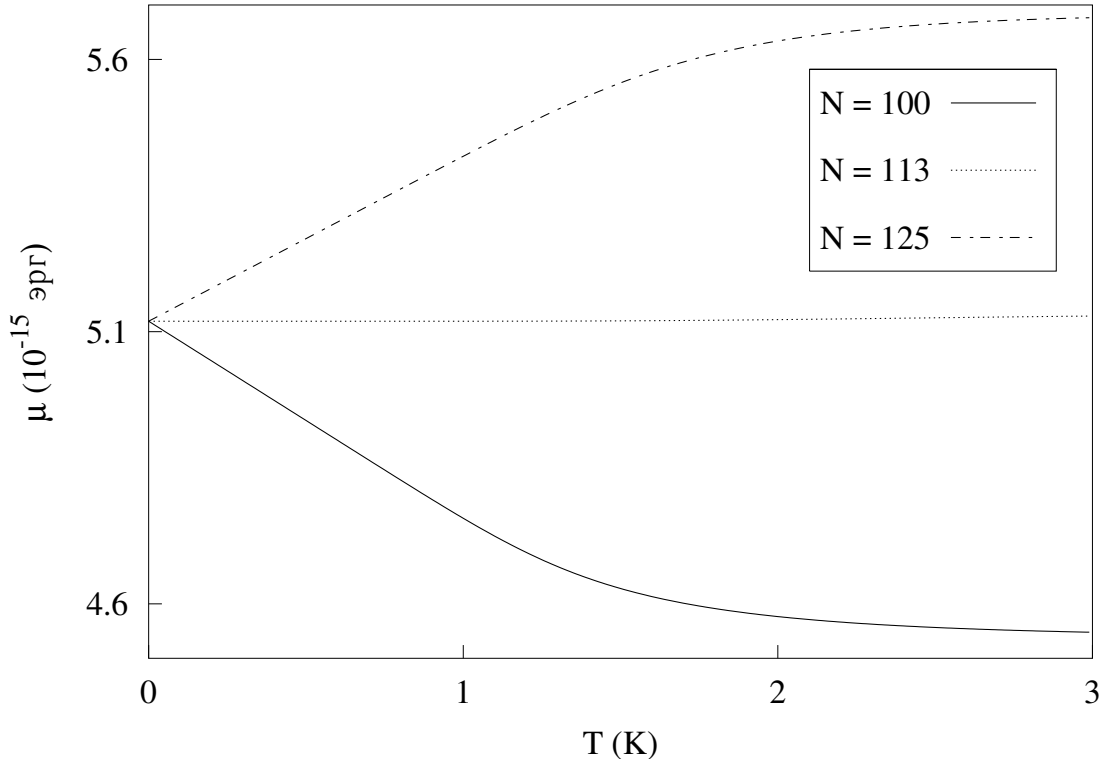


Рис. 3.5. Зависимость химического потенциала электронного газа на сфере радиуса  $R = 10^{-5}$  см от температуры.

ся убывающей функцией температуры, если  $N - 2l_0^2 > 2l_0 + 1$ , то химический потенциал возрастает с увеличением температуры. В случае, когда  $N - 2l_0^2 = 2l_0 + 1$ , химический потенциал практически не зависит от температуры. Как видно из рисунка, при достаточно низкой температуре ( $T < 1$  К) зависимость  $\mu(T)$  является линейной. При увеличении температуры линейная зависимость сменяется слабой монотонной зависимостью  $\mu$  от  $T$ . Исходя из Рис. 3.5 и формулы (3.5), заметим, что при достаточно низких температурах положение скачков изменяется с увеличением  $T$  вследствие зависимости химического потенциала от температуры.

Рассмотрим сначала случай заполненной верхней оболочки. Тогда число электронов  $N = 2(2l_0 + 1)^2$ . При  $T = 0$  функция распределения  $f_0(E_{l_0}) = 1$ , поэтому формулы (3.9) и (3.10) справедливы и для рассматриваемого случая.

При  $T = 0$  химический потенциал  $\mu = E_{l_0}$ , тогда

$$\omega_{kink}(l) = \frac{\Omega}{2}[l_0(l_0 + 1) - l(l + 1)]. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что скачок с номером  $l_0 - 1$  в поглощении возникает при частоте электромагнитного излучения  $\omega = \Omega l_0$ .

Как видно из графика зависимости  $\mu(T)$  (Рис. 3.5), при замкнутой электронной оболочке химический потенциал находится выше  $l_0$ -го электронного уровня и расстояние между  $\mu$  и  $E_{l_0}$  увеличивается с увеличением температуры. Таким образом, с ростом температуры скачки сдвигаются в высокочастотную область (Рис. 3.6 и 3.7).

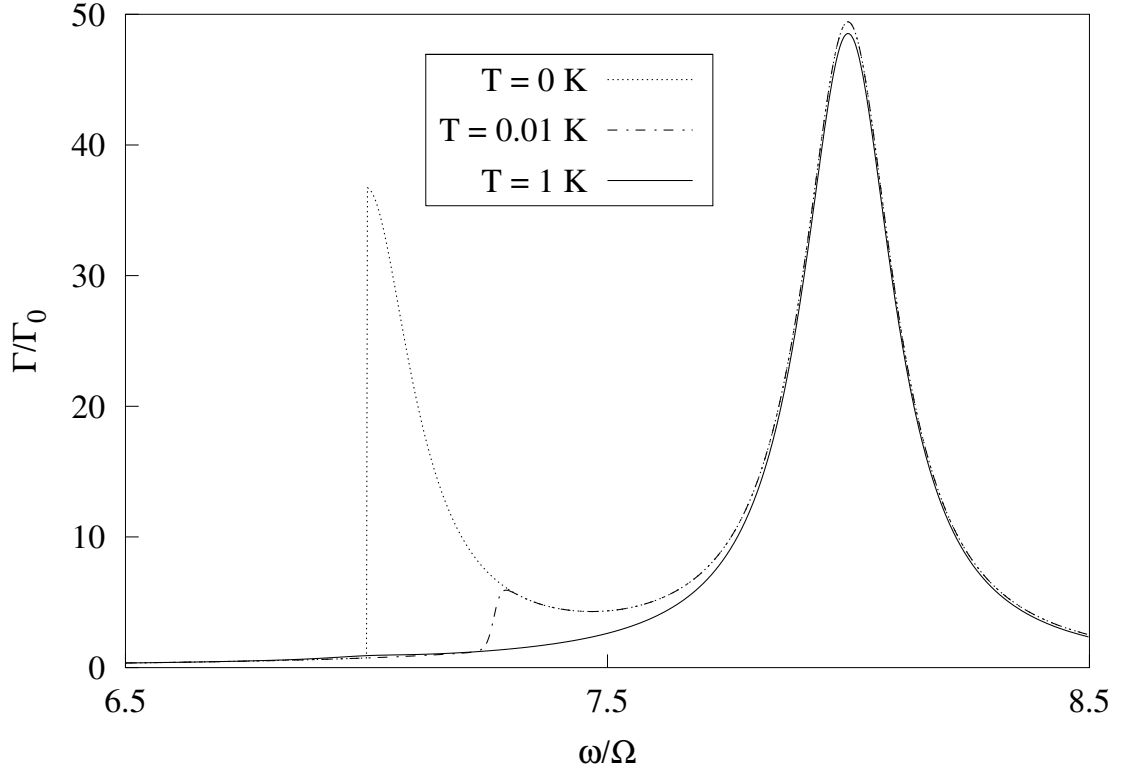


Рис. 3.6. Изменение положения скачка на кривой поглощения при разных значениях температуры (случай полностью заполненной верхней электронной оболочки);  $R = 10^{-5}$  см,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с,  $N = 128$ .

При увеличении температуры скачки сильно сглаживаются.

Принимая во внимание (3.9) и (3.12), оценим поглощение при нулевой температуре

$$\frac{\Gamma(T = 0)}{\Gamma_0} \approx \frac{\Omega}{\omega} \left[ \frac{l_0^2(l_0 + 1)}{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l_0 + 1)]^2} + \frac{(l_0 - 1)^2 l_0}{1 + \tau^2(\omega - \Omega l_0)^2} \Theta(\omega - \Omega l_0) \right]. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что интенсивность пика поглощения на резонансной частоте  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$  такая же как для постоянного химиче-

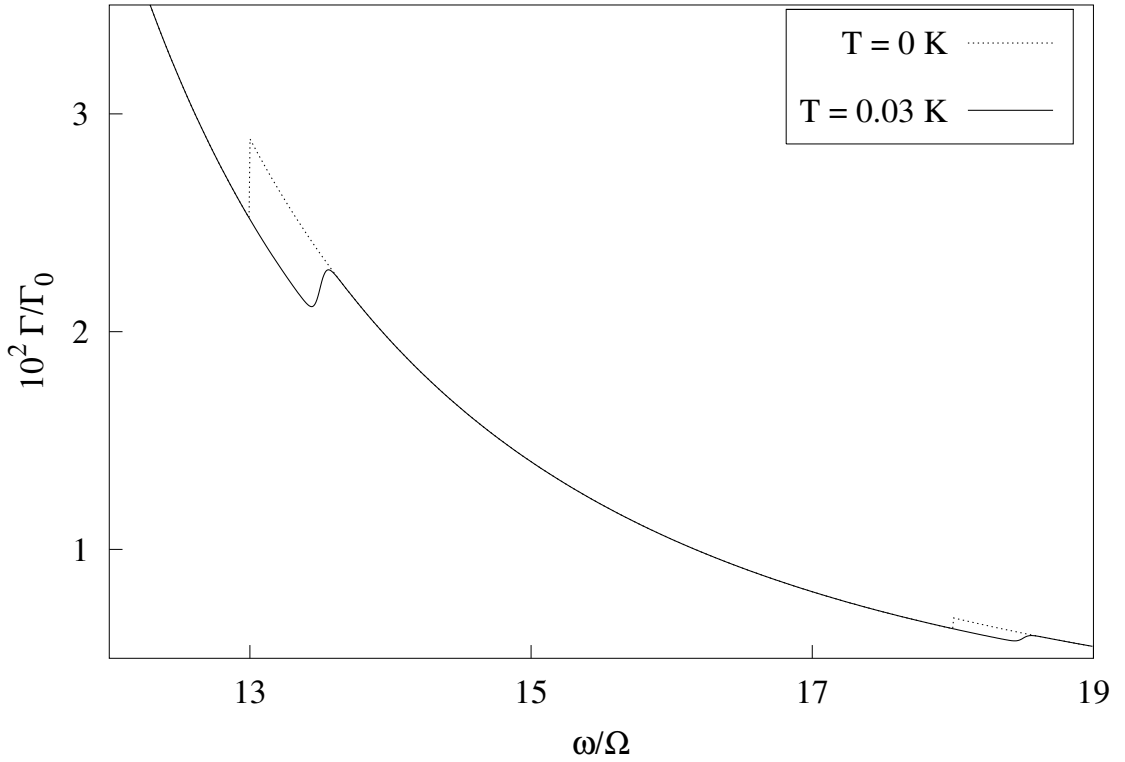


Рис. 3.7. Сдвиг скачков в высокочастотную область с увеличением температуры (случай полностью заполненной верхней оболочки);  $R = 10^{-5}$  см,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с,  $N = 128$ .

ского потенциала при  $\mu < E_{l_0} + \hbar\Omega$  (формула (3.11)). Как видно из (3.8), увеличение температуры приводит к уменьшению интенсивности второго резонансного пика. Отметим, что из-за температурной зависимости химического потенциала при постоянном числе электронов интенсивность второго пика слабее зависит от температуры по сравнению с аналогичной зависимостью для случая постоянного химического потенциала (Рис. 3.1 и 3.6).

Для величины скачка при низкой температуре получим оценку

$$\Delta_l \approx 2\Gamma_0 \frac{l^2(l+1)}{[l_0(l_0+1) - l(l+1)]\{1 + \tau^2\Omega^2[l_0(l_0+1) - (l+1)(l+2)]^2/4\}}.$$

Из этой формулы следует, что величина скачка с номером  $l_0 - 1$  оценивается формулой

$$\Delta_{l_0-1} \approx \Gamma_0(l_0 - 1)^2.$$

Теперь рассмотрим случай частично заполненной верхней оболочки. Как известно, ступенчатая функция Ферми размыта на величину по-

рядка  $T$ . Пусть температурное размытие функции распределения много меньше расстояния между уровнями  $\hbar\Omega l_0/T \gg 1$ . Тогда из условия нормировки получим

$$f_0(E_{l_0}) \approx \frac{N - 2l_0^2}{2(2l_0 + 1)}. \quad (3.14)$$

Здесь  $2(2l_0 + 1)$  — кратность вырождения верхнего занятого уровня,  $N - 2l_0^2$  — число электронов, находящихся на  $l_0$ -м уровне.

Из (3.14) следует, что

$$\mu \approx E_{l_0} + T \ln \frac{N - 2l_0^2}{2(l_0 + 1)^2 - N}. \quad (3.15)$$

Эта формула хорошо описывает поведение химического потенциала при  $T \leq 1$  К (Рис. 3.5). Легко показать, что  $2(l_0 + 1)^2 - N$  есть число свободных состояний на уровне  $E_{l_0}$ . Как видно из (3.15), если верхний занятый уровень заполнен наполовину ( $N = 2l_0^2 + 2l_0 + 1$ ), то  $\mu = E_{l_0}$ . В случае, когда число электронов на  $l_0$ -м уровне больше половины кратности вырождения этого уровня ( $N - 2l_0^2 > 2l_0 + 1$ ), получим  $\mu > E_{l_0}$ , в противоположном случае, получим  $\mu < E_{l_0}$  (Рис. 3.4).

Учитывая (3.14), получим оценку для поглощения при низкой температуре

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} \approx \frac{\Omega}{\omega} \left[ \frac{(N - 2l_0^2)l_0^2(l_0 + 1)}{2(2l_0 + 1)\{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l_0 + 1)]^2\}} + \frac{[1 - f_0(E_{l_0-1} + \hbar\omega)](l_0 - 1)^2 l_0}{1 + \tau^2(\omega - \Omega l_0)^2} \right]. \quad (3.16)$$

Исходя из (3.16), оценим интенсивности пиков поглощения:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\omega = \Omega l_0)}{\Gamma_0} &\approx \frac{(N - 2l_0^2)l_0(l_0 + 1)}{2(2l_0 + 1)[1 + (\tau\Omega)^2]} + \frac{[2(l_0 + 1)^2 - N](l_0 - 1)^2}{2(2l_0 + 1)}, \\ \frac{\Gamma(\omega = \Omega(l_0 + 1))}{\Gamma_0} &\approx \frac{N - 2l_0^2}{2(2l_0 + 1)} l_0^2 + \frac{l_0(l_0 - 1)^2}{(l_0 + 1)[1 + (\tau\Omega)^2]}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что при нулевой температуре вместо первого пика имеется скачок величиной  $\Gamma_0(l_0 - 1)^2$  (Рис. 3.8).

Из оценок интенсивностей пиков следует, что в области линейной зависимости химического потенциала от температуры, то есть в области, где справедлива формула (3.15), интенсивность второго пика не зависит

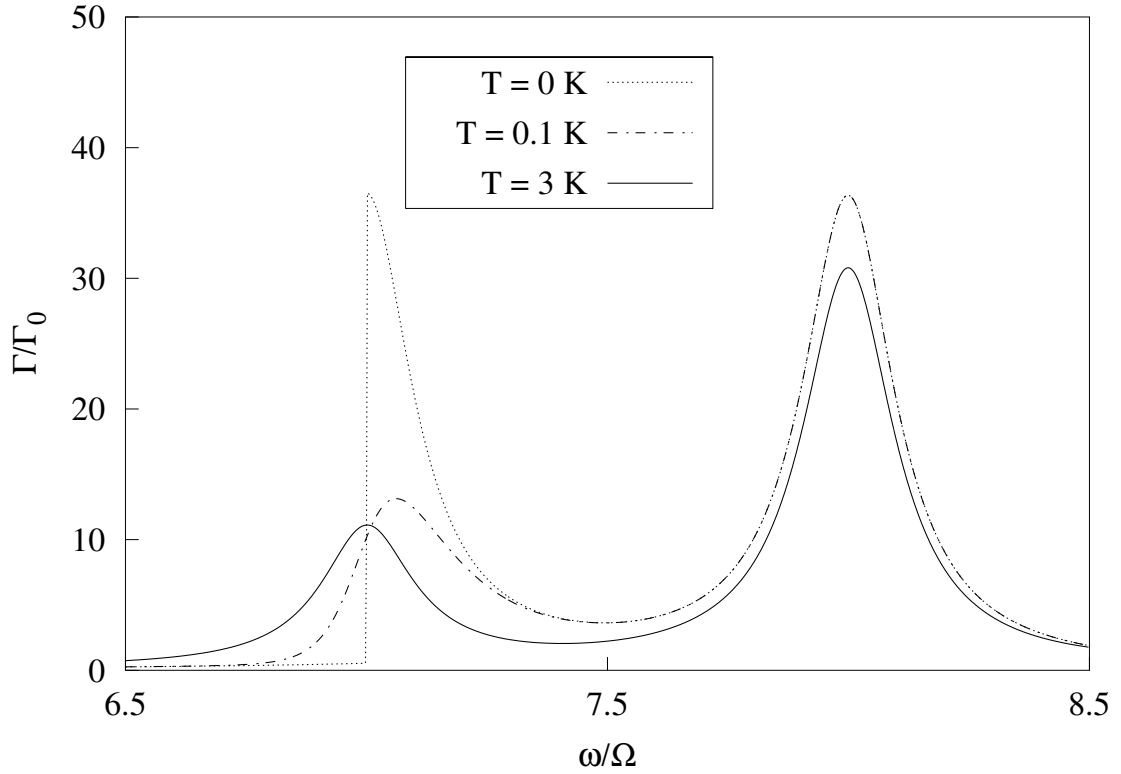


Рис. 3.8. Кривые поглощения при разных значениях температуры электронного газа на наносфере (случай частично заполненной верхней оболочки);  $R = 10^{-5}$  см,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с,  $N = 120$ .

от температуры. Дальнейшее увеличение  $T$  приводит к уменьшению интенсивности второго пика поглощения (Рис. 3.8).

В заключении этого раздела рассмотрим результаты для случая постоянного химического потенциала системы. Как отмечалось выше, при нулевой температуре на кривой поглощения имеется один резонансный пик при  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$ . Интенсивность пика определяется орбитальным квантовым числом верхней занятой оболочки  $l_0$ , радиусом сферы  $R$  и временем релаксации  $\tau$ . При увеличении температуры высота этого пика уменьшается, и появляются новые резонансные пики из-за электронных переходов с уровня  $E_{l_0-1}$  на  $E_{l_0}$ , а также с уровня  $E_{l_0-2}$  на  $E_{l_0-1}$  или с  $E_{l_0+1}$  на  $E_{l_0+2}$  и так далее (Рис. 3.1). При нулевой температуре на кривой поглощения имеются резкие скачки, возникающие при пересечении электронных энергетических уровней с уровнем  $\mu - \hbar\omega$ . Положение скачков зависит от величины химического потенциала и номера электронного

уровня. Если при изменении величины химического потенциала не изменяется квантовое число  $l_0$ , то изменяются только положение и величина скачка, поэтому по обе стороны от скачков кривые поглощения при разный  $\mu$  совпадают (Рис. 3.3). С ростом температуры положение скачков не изменяется, но даже небольшое увеличение температуры приводит к заметному сглаживанию скачков (Рис. 3.2).

Различие поведения поглощения между случаями  $\mu = const$  и  $N = const$ , в основном, есть следствие двух обстоятельств. Во-первых, химический потенциал в случае постоянного числа частиц зависит от температуры. В случае изолированной сферы и полностью заполненной верхней электронной оболочке, интенсивность пика при резонансной частоте  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$  при  $T = 0$  такая же как и для случая сферы в термостате при  $\mu < E_{l_0} + \hbar\Omega$  (формула (3.11)). Увеличение температуры приводит к увеличению величины химического потенциала (Рис. 3.5). Из-за этого, в области линейной зависимости  $\mu(T)$  интенсивность пика при  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$  практически не зависит от температуры, в отличие от сферы в термостате (Рис. 3.1 и 3.6). Так как при заполненной верхней электронной оболочке химический потенциал возрастает с увеличением температуры, то с ростом температуры скачки сдвигаются в высокочастотную область (Рис. 3.6 и 3.7). Заметим, что в случае  $\mu = const$  положение скачков не зависит от температуры (Рис. 3.2).

Во-вторых, в отличие от случая постоянного химического потенциала, при постоянном числе частиц верхний занятый электронами энергетический уровень может быть частично заполненным при нулевой температуре. Если электронная оболочка с  $l = l_0$  частично заполнена, то интенсивность пиков поглощения зависит от числа электронов в этой оболочке, равного  $N - 2l_0^2$ . В случае, когда  $N - 2l_0^2 < 2l_0 + 1$  (число электронов на уровне  $E_{l_0}$  меньше половины кратности вырождения уровня), с увеличением температуры химический потенциал убывает, следовательно скачки сдвигаются в низкочастотную область (Рис. 3.9).

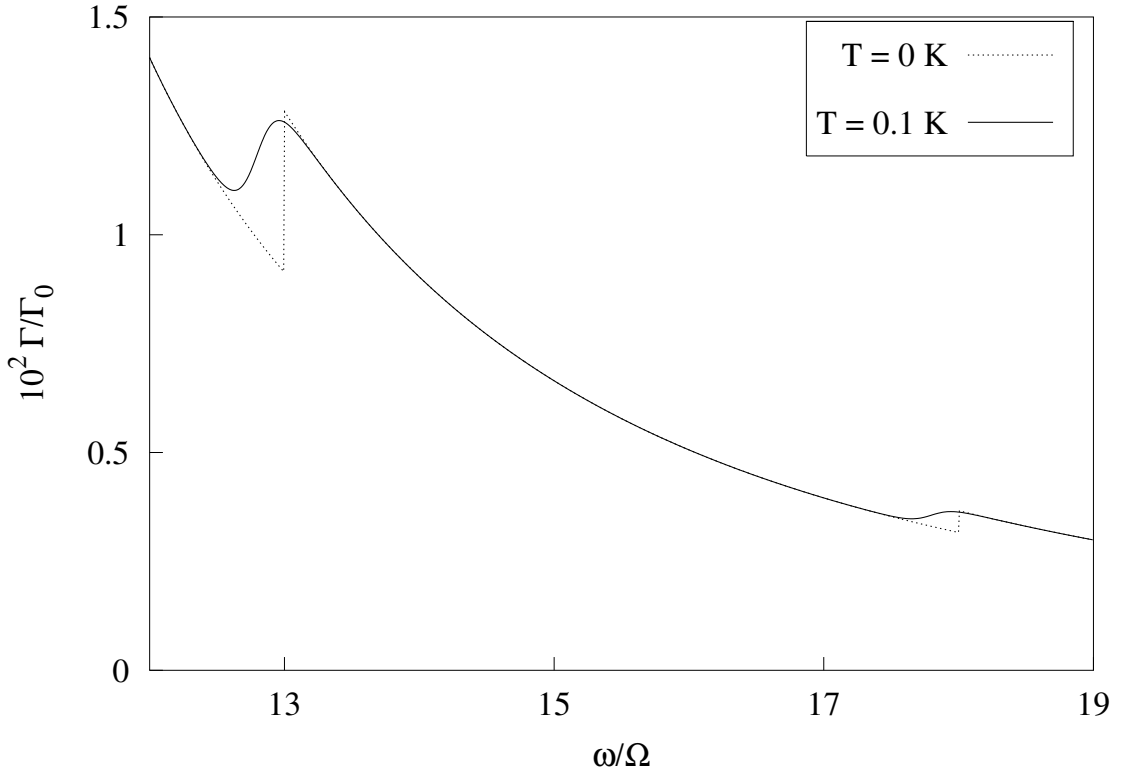


Рис. 3.9. Сдвиг скачков в низкочастотную область с увеличением температуры (число электронов на уровне  $E_{l_0}$  меньше половины кратности вырождения уровня);  $R = 10^{-5}$  см,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с,  $N = 100$ .

При  $N - 2l_0^2 > 2l_0 + 1$  скачки ведут себя аналогично случаю заполненной верхней оболочки (Рис. 3.6 и 3.7). Если уровень  $E_{l_0}$  заполнен наполовину ( $N = 2l_0^2 + 2l_0 + 1$ ), то  $\mu \approx E_{l_0}$ , и положение скачков не изменяется с температурой.

### 3.2 Оптические переходы электронов наносферы в магнитном поле

Рассмотрим систему невзаимодействующих электронов, находящихся на поверхности наносферы в слабом однородном магнитном поле. Уравнение Шредингера в этом случае можно свести к дифференциальному уравнению

$$(1 - \eta^2)f''(\eta) - 2\eta f'(\eta) + \left( A - C^2(1 - \eta^2) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right) f(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, 1].$$

где  $A = (2m^*R^2/\hbar^2)(E - \hbar\omega_c m/2)$ ,  $C = m^*\omega_c R^2/2\hbar$ ,  $E$  — энергия электрона. Волновая функция электрона имеет вид  $\psi(\varphi, \vartheta) = e^{im\varphi} f(\cos \vartheta)$ . Решением этого дифференциального уравнения являются вытянутые угловые сфероидальные функции  $S_{ml}(C, \eta)$  [73]. В случае слабого магнитного поля в гамильтониане системы можно отбросить квадратичный по полю член. Спектральная задача для гамильтониана в этом приближении легко решается [64]:

$$\psi_{l,m}(\vartheta, \varphi) = Y_{l,m}(\vartheta, \varphi); \quad E_{l,m} = \frac{\hbar\Omega}{2}l(l+1) + \frac{\hbar\omega_c}{2}m. \quad (3.17)$$

Необходимо отметить, что расщепление уровней электрона на поверхности наносферы в магнитном поле аналогично эффекту Зеемана для атома. Условием применимости формул (3.17) является выполнение неравенства

$$B \ll 4c\hbar/|e|R^2. \quad (3.18)$$

Поглощение электромагнитного излучения вырожденным электронным газом наносферы вычисляется по формуле (1.1). Так же как и в предыдущем разделе, при вычислении матричных элементов оператора  $H_R$  (формула (1.2)) электромагнитное поле предполагается однородным, то есть считается, что длина волны фотона много больше радиуса сферы.

Ограничимся далее детальным исследованием только линейно поляризованной электромагнитной волны. Направим ось  $Oz$  вдоль направления однородного магнитного поля  $\mathbf{B}$ , а ось  $Ox$  так, чтобы вектор поляризации фотона лежал в плоскости  $xOz$ :  $\mathbf{e}_k = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ , где  $\alpha$  — угол между вектором поляризации фотона и магнитным полем. Будем различать два выделенных по симметрии случая: конфигурация Фарадея — волновой вектор фотона параллелен однородному магнитному полю ( $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}$ ), следовательно,  $\mathbf{e}_k = (1, 0, 0)$ ; конфигурация Фойхта — волновой вектор фотона перпендикулярен магнитному полю ( $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ ). В этом случае вектор поляризации фотона произвольно направлен относительно магнитного поля ( $\mathbf{e}_k = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ ).

В конфигурации Фарадея и при симметричной калибровке векторного потенциала магнитного поля имеем  $\mathbf{e}_k(\mathbf{p} + |e|\mathbf{A}/c) = p_x - m^*\omega_c y/2$ .



Тогда в дипольном приближении матричные элементы перехода запишутся в виде

$$\langle l', m', -\mathbf{k} | H_R | l, m, 0 \rangle = \frac{|e|}{m^*} \sqrt{\frac{2\pi\hbar N_{\mathbf{k}}}{\varepsilon(\omega)\omega}} \left\langle l', m' \left| p_x - \frac{m^*\omega_c}{2} y \right| l, m \right\rangle.$$

Используя рекуррентные формулы для присоединенных полиномов Лежандра, можно получить выражение для этого матричного элемента. После несложных вычислений найдем, что в дипольном приближении в конфигурации Фарадея переходы возможны только между уровнями соседних оболочек ( $l' = l \pm 1$ ) с магнитными квантовыми числами, отличающимися на единицу ( $m' = m \pm 1$ ). Отметим, что правила отбора для переходов в нашем случае такие же как и в эффекте Зеемана. Резонансные пики поглощения в магнитном поле расщепляются на несколько компонент, причем количество компонент будет зависеть от ориентации волнового вектора относительно магнитного поля. По аналогии с эффектом Зеемана будем называть  $\sigma$ -компонентами резонансные пики, обусловленные переходами  $m \rightarrow m \pm 1$ , и  $\pi$ -компонентами резонансных пиков, обусловленные переходами  $m \rightarrow m$ .

После несложных преобразований, поглощение можно представить в виде суммы четырех слагаемых

$$\Gamma_{\sigma} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4, \quad (3.19)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{1,2}}{\Gamma_0} &= \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_0(E_{l,m}) [1 - f_0(E_{l,m} + \hbar\omega)] \times \\ &\times \frac{(l \pm m + 1)(l \pm m + 2)}{(2l + 1)(2l + 3)} \frac{(l \pm \omega_c/2\Omega)^2}{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l + 1) \mp \omega_c/2]^2}, \\ \frac{\Gamma_{3,4}}{\Gamma_0} &= \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_0(E_{l,m}) [1 - f_0(E_{l,m} + \hbar\omega)] \times \\ &\times \frac{(l \mp m)(l \mp m - 1)}{(2l - 1)(2l + 1)} \frac{(l + 1 \mp \omega_c/2\Omega)^2}{1 + \tau^2(\omega + \Omega l \mp \omega_c/2)^2} \end{aligned}$$

( $\Gamma_0 = e^2\tau/4cm^*R^2\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ ). Здесь для учета размытия резонансов рассеянием введено лоренцевское уширение пиков по формуле (3.3).

Отметим, что полученные формулы для поглощения справедливы как для изолированной сферы ( $N = const$ ), так и для сферы, обменивающейся электронами с резервуаром ( $\mu = const$ ). Однако, между этими двумя случаями существует принципиальные различия в поведении поглощения. Эти различия рассмотрены ниже. Рассмотрим вначале случай, когда сфера находится в термостате с химическим потенциалом  $\mu$  и температурой  $T$ .

Введем орбитальное квантовое число  $l_0$ , такое что  $E_{l_0, -l_0} \leq \mu < E_{l_0+1, -l_0-1}$  и магнитное квантовое число  $m_0$ , которое при  $E_{l_0, l_0} \leq \mu < E_{l_0+1, -l_0-1}$  равно  $l_0$ , в противном случае  $m_0$  находится из двойного неравенства  $E_{l_0, m_0} \leq \mu < E_{l_0, m_0+1}$ . При нулевой температуре  $l_0$  и  $m_0$  являются квантовыми числами верхнего занятого электронами уровня. Исходя из условия нормировки, число электронов в системе при нулевой температуре  $N = 2(l_0^2 + l_0 + m_0 + 1)$ .

В случае высокочастотного поля, вкладом нерезонансных членов  $\Gamma_3$  и  $\Gamma_4$  в окрестности резонанса можно пренебречь. Резонансы в поглощении возникают при переходах  $(l_0, m) \rightarrow (l_0 + 1, m \pm 1)$  и  $(l_0 - 1, m) \rightarrow (l_0, m \pm 1)$ , то есть резонансные частоты равны  $\omega_{1,2} = \Omega l_0 \mp \omega_c/2$  и  $\omega_{3,4} = \Omega(l_0 + 1) \mp \omega_c/2$ .

Оценим поглощение при нулевой температуре. Оставляя в (3.19) только слагаемые с  $l = l_0 - 1$  и  $l = l_0$ , получим  $\Gamma_\sigma(T = 0) \approx \Gamma_1 + \Gamma_2$ , где

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} &= \frac{\Omega}{\omega} \left[ \frac{(l_0 + m_0 + 1)(l_0 + m_0 + 2)(l_0 + m_0 + 3)(l_0 + \omega_c/2\Omega)^2}{3(2l_0 + 1)(2l_0 + 3)\{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l_0 + 1) - \omega_c/2]^2\}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(l_0 - 1 + \omega_c/2\Omega)^2}{(2l_0 - 1)(2l_0 + 1)[1 + \tau^2(\omega - \Omega l_0 - \omega_c/2)^2]} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{m=-l_0+1}^{l_0-1} (l_0 + m)(l_0 + m + 1)\Theta(E_{l_0-1, m} + \hbar\omega - \mu) \right], \quad (3.20) \\ \frac{\Gamma_2}{\Gamma_0} &= \frac{\Omega}{\omega} \left[ \frac{(l_0 + m_0 + 1)(7l_0^2 + m_0^2 - 4l_0m_0 + 14l_0 - 4m_0 + 6)(l_0 - \omega_c/2\Omega)^2}{3(2l_0 + 1)(2l_0 + 3)\{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l_0 + 1) + \omega_c/2]^2\}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(l_0 - 1 - \omega_c/2\Omega)^2}{(2l_0 - 1)(2l_0 + 1)[1 + \tau^2(\omega - \Omega l_0 + \omega_c/2)^2]} \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left. \sum_{m=-l_0+1}^{l_0-1} (l_0 - m)(l_0 - m + 1) \Theta(E_{l_0-1,m} + \hbar\omega - \mu) \right]. \quad (3.21)$$

В случае, когда пики хорошо разрешены ( $\tau\Omega \gg 1$ ,  $\tau\omega_c \gg 1$ ,  $\omega_c \ll \Omega$ ) получим оценки для случая нулевой температуры. Пусть  $I_\sigma^{(i)}$  — относительная интенсивность  $\sigma$ -компоненты резонансного пика ( $\Gamma_\sigma/\Gamma_0$ ) при резонансной частоте  $\omega_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). Из предыдущей формулы имеем

$$I_\sigma^{(1)}(T = 0) \approx \frac{(l_0 - 1 - \omega_c/2\Omega)^2 (l_0 - m_0 - 2)(l_0 - m_0 - 1)(l_0 - m_0)}{3(2l_0 - 1)(2l_0 + 1)(l_0 - \omega_c/2\Omega)}, \quad (3.22)$$

$$I_\sigma^{(2)}(T = 0) \approx \frac{(l_0 - 1 + \omega_c/2\Omega)^2 (l_0 - m_0)(7l_0^2 + m_0^2 + 4l_0m_0 - 1)}{3(2l_0 - 1)(2l_0 + 1)(l_0 + \omega_c/2\Omega)}, \quad (3.23)$$

$$I_\sigma^{(3)}(T = 0) \approx \frac{(l_0 - \omega_c/2\Omega)^2 (l_0 + m_0 + 1)(7l_0^2 + m_0^2 - 4l_0m_0 + 14l_0 - 4m_0 + 6)}{3(2l_0 + 1)(2l_0 + 3)(l_0 + 1 - \omega_c/2\Omega)}, \quad (3.24)$$

$$I_\sigma^{(4)}(T = 0) \approx \frac{(l_0 + \omega_c/2\Omega)^2 (l_0 + m_0 + 1)(l_0 + m_0 + 2)(l_0 + m_0 + 3)}{3(2l_0 + 1)(2l_0 + 3)(l_0 + 1 + \omega_c/2\Omega)}. \quad (3.25)$$

Как видно из оценок, интенсивности первого и третьего пиков ( $I_\sigma^{(1)}$  и  $I_\sigma^{(3)}$ ) уменьшаются, а интенсивности второго и четвертого пиков ( $I_\sigma^{(2)}$  и  $I_\sigma^{(4)}$ ) увеличиваются с ростом магнитного поля.

Рассмотрим влияние температуры на  $I_\sigma^{(1)}$  и  $I_\sigma^{(2)}$ . Первый и второй резонансные пики возникают за счет переходов  $(l_0 - 1) \rightarrow l_0$ . При  $T = 0$  переходы возможны только на незанятые уровни  $l_0$ -й оболочки ( $m > m_0$ ). Увеличение температуры приводит к уменьшению вкладов переходов на уровни с  $m > m_0$  и к увеличению вкладов переходов на уровни с  $m \leq m_0$ . Следовательно,  $I_\sigma^{(1)}$  возрастает, а  $I_\sigma^{(2)}$  убывает с увеличением температуры ( $\hbar\omega_c/2T > 1$ ). Так как  $I_\sigma^{(2)} > I_\sigma^{(1)}$ , то увеличение температуры приводит к увеличению меньшего пика и уменьшению бóльшего из этих двух пиков (Рис. 3.10). Это связано с тем, что вклады в  $I_\sigma^{(1)}$  больше для переходов с меньшим  $m$ , а в  $I_\sigma^{(2)}$  больше для переходов с бóльшим  $m$ .

Исследуем теперь влияние температуры на  $I_\sigma^{(3)}$  и  $I_\sigma^{(4)}$ . Третий и четвертый резонансные пики возникают при электронных переходах с уровней  $l_0$ -й оболочки на уровни  $(l_0 + 1)$ -й оболочки. При  $T = 0$  переходы возможны только с заполненных уровней  $l_0$ -й оболочки ( $m \leq m_0$ ). Увеличение температуры приводит к уменьшению вкладов переходов с уровней

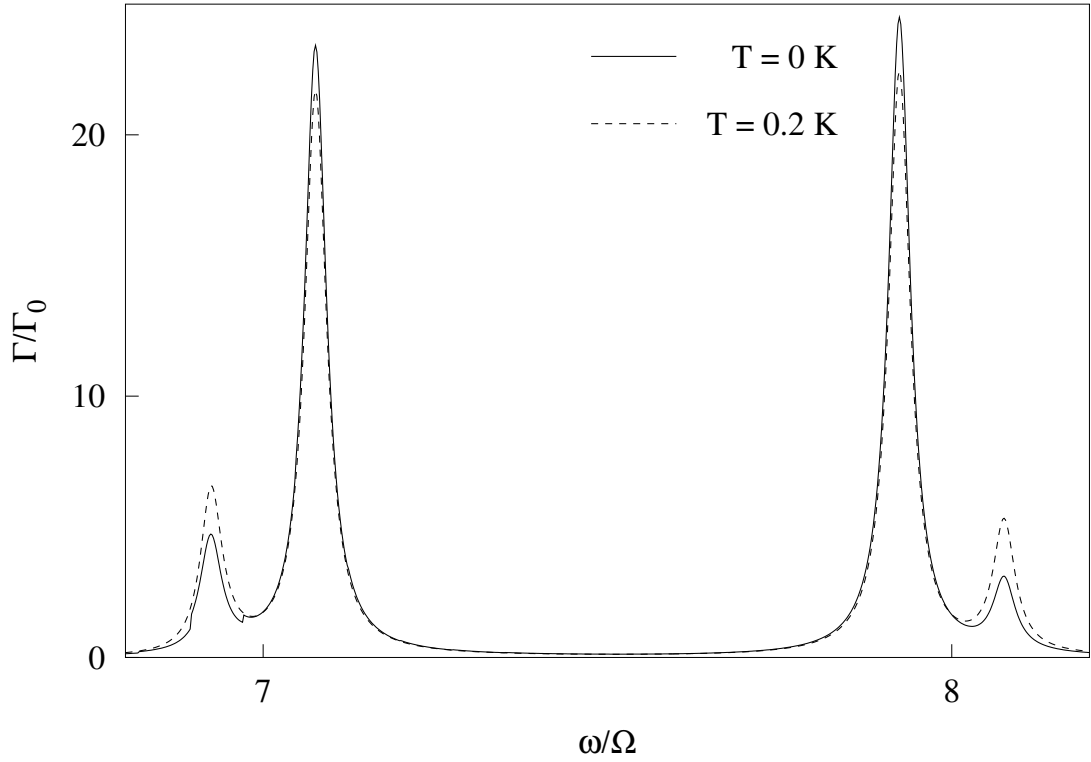


Рис. 3.10. Изменение интенсивностей пиков поглощения при разных значениях температуры;  $R = 10^{-5}$  см,  $\tau = 3 \times 10^{-10}$  с,  $\mu = 5.1 \times 10^{-15}$  эрг,  $\omega_c/\Omega = 0.15$ ,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фарадея).

с  $m \leq m_0$  и к увеличению вкладов переходов с уровней с  $m > m_0$ , то есть  $I_\sigma^{(3)}$  убывает, а  $I_\sigma^{(4)}$  возрастает с увеличением температуры (при  $\hbar\omega_c/2T > 1$ ). Это связано с тем, что вклады в  $I_\sigma^{(3)}$  больше для переходов с меньшим  $m$ , а в  $I_\sigma^{(4)}$  больше для переходов с бóльшим  $m$ . Так как  $I_\sigma^{(3)} > I_\sigma^{(4)}$  (при  $m_0 < l_0$ ), то рост температуры приводит к увеличению меньшего пика и уменьшению бóльшего (Рис. 3.10). Численный анализ показал, что если верхняя оболочка заполнена, интенсивности обоих пиков уменьшаются с увеличением температуры.

Теперь рассмотрим форму и положение пиков. В фарадеевской конфигурации положение пиков линейно зависит от магнитного поля:  $\omega_{1,2} = \Omega l_0 \mp \omega_c/2$ ,  $\omega_{3,4} = \Omega(l_0 + 1) \mp \omega_c/2$ . При малых полях ( $\omega_c \ll \Omega$ ) пики на кривой поглощения имеют дублетную структуру. Расстояние между первым и вторым, а также между третьим и четвертым пиками равно циклотронной частоте. Увеличение магнитного поля приводит к увеличению

расстояния между этими пиками и уменьшению расстояния между вторым и третьим пиками. При  $\omega_c = \Omega$  второй и третий пики в поглощении сливаются в один.

Будем называть особенности в поглощении, обусловленные пересечениями уровня  $\mu - \hbar\omega$  с энергетическими уровнями электронов, скачками первого типа, а скачками второго типа — особенности, обусловленные пересечениями энергетических уровней с химическим потенциалом  $\mu$ .

Рассмотрим скачки первого типа. Так как в слабом магнитном поле расстояние между уровнями соседних оболочек много больше расстояния между соседними уровнями оболочки, то скачки первого типа возникают сериями. Каждая серия скачков соответствует пересечениям уровней отдельной оболочки с  $\mu - \hbar\omega$ , и число скачков в каждой серии равно количеству уровней соответствующей оболочки. Так для оболочки с номером  $l$  число скачков равно  $2l + 1$ . Из условия возникновения скачков  $\mu - \hbar\omega = E_{l,m}$  находим, что скачки возникают на кривой поглощения при частотах электромагнитного излучения

$$\omega_{jump}(l, m) = \frac{\mu}{\hbar} - \frac{\Omega}{2}l(l+1) - \frac{\omega_c}{2}m. \quad (3.26)$$

Из (3.26) следует, что скачки  $(l_0 - 1)$ -й серии возникают в области первого и второго резонансных пиков, а скачки остальных серий — на правом крыле четвертого пика.

Рассмотрим серию скачков  $(l_0 - 1)$ . Отметим, что при  $m_0 > 0$  в точке  $E_{l_0, m_0} = \mu$  (точка возникновения скачков второго типа на третьем и четвертым пиках) из (3.26) имеем  $\omega_{jump}(l_0 - 1, m) = \Omega l_0 + \omega_c(m_0 - m)/2$ . Отсюда следует, что скачек  $(l_0 - 1, m_0)$  возникает при частоте  $\omega_{jump}(l_0 - 1, m_0) = \Omega l_0$  (то есть этот скачек находится посередине между первым и вторым пиками), скачек  $(l_0 - 1, m_0 + 1)$  возникает при частоте равной первой резонансной частоте, а скачек  $(l_0 - 1, m_0 - 1)$  — при второй резонансной частоте (Рис. 3.11). Таким образом, положения скачков на максимумах резонансных пиков поглощения как функции поля одинаковы и определяются из условия  $E_{l_0, m_0} = \mu$  (при  $m_0 < -1$  в последней формуле необходимо сделать

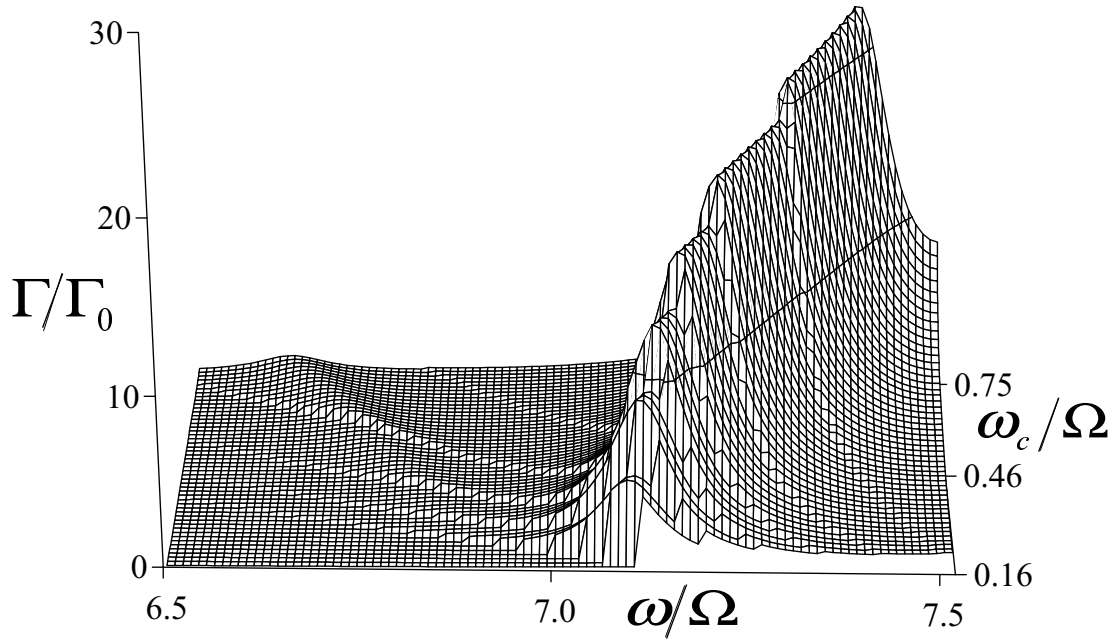


Рис. 3.11. Зависимость поглощения наносферой от частоты излучения и магнитного поля;  $R = 10^{-5}$  см,  $T = 0$  К,  $\tau = 10^{-10}$  с,  $\mu = 5.22 \times 10^{-15}$  эрг,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фарадея). Показан второй пик и возникновение первого пика с увеличением магнитного поля. На рисунке видны скачки первого типа.

замену  $m_0 \rightarrow m_0 + 1$ ).

Заметим, что с увеличением поля расстояние между первым резонансным пиком и скачком  $(l_0 - 1, 1)$  не изменяется, также как и расстояние между вторым пиком и скачком  $(l_0 - 1, -1)$ .

Если  $m_0 = 0$  или  $m_0 = -1$ , то скачек  $(l_0 - 1, m_0)$  не изменяет своего положения с изменением поля, скачки с  $m > 0$  сдвигаются влево, а скачки с  $m < 0$  — вправо от  $\Omega l_0$  с увеличением магнитного поля.

На Рис. 3.12(a) показаны скачки в области первого пика, соответствующие пересечениям уровней шестой оболочки с  $\mu - \hbar\omega$ . На Рис. 3.12(b) представлена серия скачков, возникающая при пересечении уровней пятой оболочки с  $\mu - \hbar\omega$ .

При близких к нулю температурах относительную величину скачка

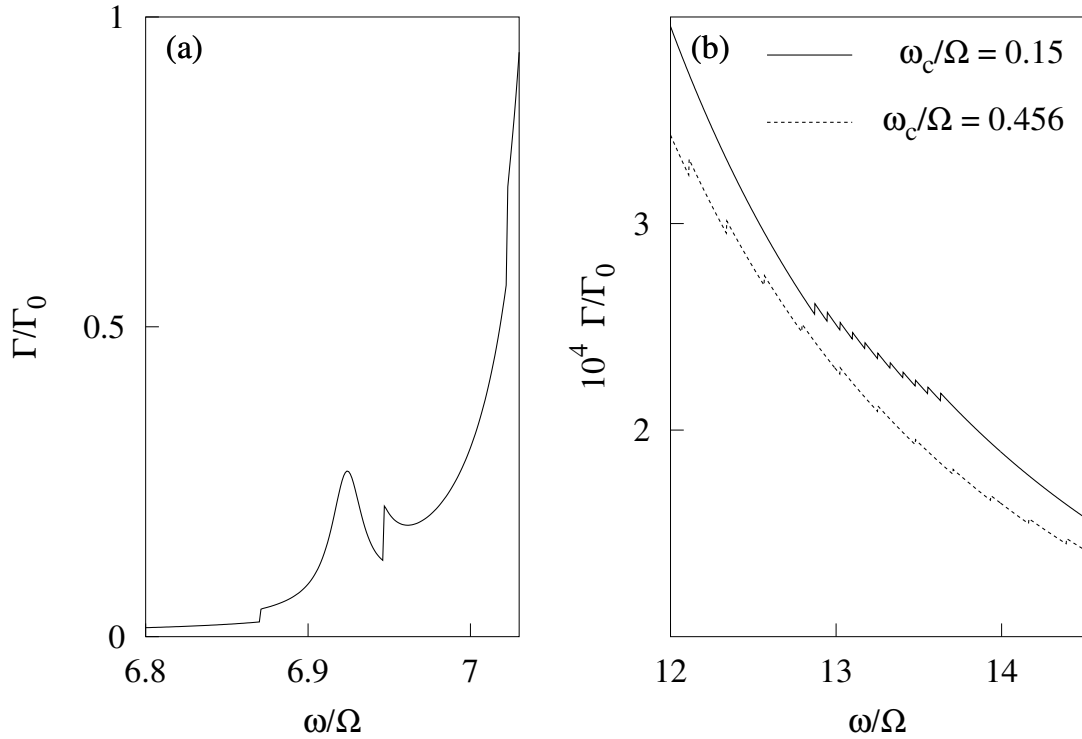


Рис. 3.12. (а) Скачки первого типа в области первого резонансного пика ( $\omega_c/\Omega = 0.15$ ); (б) Изменение положения и величины скачка первого типа с увеличением магнитного поля;  $R = 10^{-5}$  см,  $T = 0$  К,  $\tau = 5 \times 10^{-10}$  с,  $\mu = 5.165 \times 10^{-15}$  эрг,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фарадея).

первого типа  $\Delta_{l,m}^{(1)}$  можно оценить следующим выражением

$$\Delta_{l,m}^{(1)} \approx \frac{1}{[\mu/\hbar\Omega - l(l+1)/2 - \omega_c m/2\Omega](2l+1)(2l+3)} \times \left[ \frac{(l+m+1)(l+m+2)(l+\omega_c/2\Omega)^2}{1 + \tau^2[\mu/\hbar - \Omega(l+1)(l+2)/2 - \omega_c(m+1)/2]^2} + \frac{(l-m+1)(l-m+2)(l-\omega_c/2\Omega)^2}{1 + \tau^2[\mu/\hbar - \Omega(l+1)(l+2)/2 - \omega_c(m-1)/2]^2} \right]. \quad (3.27)$$

Из (3.27) видно, что величина скачка тем больше, чем ближе скачек

$(l_0 - 1)$ -й серии к первой или второй резонансным частотам. Поэтому чем ближе  $m$  к  $m_0 \pm 1$ , тем больше  $\Delta_{l_0-1,m}^{(1)}$ . Для тех скачков, которые магнитное поле “сдвигает” к резонансной частоте, величина скачка увеличивается с полем, для других — уменьшается. (Рис. 3.11).

С ростом поля положения скачков  $(l_0 - 1)$ -й серии могут пересекать первую и вторую резонансные частоты, в результате, в точках первого и

второго максимума ( $\omega_{1,2} = \Omega l_0 \mp \omega_c/2$ ) поглощения при  $m_0 > 0$  происходят скачки величиной

$$\Delta_{l_0-1, m_0 \mp 1}^{(1)} \approx \frac{(l_0 - 1 \mp \omega_c/2\Omega)^2 (l_0 \mp m_0 - 1)(l_0 \mp m_0)}{(2l_0 - 1)(2l_0 + 1)(l_0 \mp \omega_c/2\Omega)} \quad (3.28)$$

(верхний знак соответствует скачкам на первом пике, нижний — на втором).

Если  $m_0 < -1$ , то величины скачков на первом и втором максимумах соответственно равны  $-\Delta_{l_0-1, m_0 \mp 1}^{(1)}$ .

Рассмотрим другие серии скачков. При  $\Omega \gg \omega_c$  уравнение (3.27) можно переписать в виде

$$\Delta_{l,m}^{(1)} \approx F(l, m) \{ [l^2 + (\omega_c/2\Omega)^2] (l^2 + 3l + 2 + m^2) + 2lm(2l + 3)\omega_c/\Omega \},$$

где

$$F(l, m) = \frac{[\mu/\hbar\Omega - l(l+1)/2 - \omega_c m/2\Omega](2l+1)(2l+3)}{1 + \tau^2[\mu/\hbar - \Omega(l+1)(l+2)/2 - \omega_c m/2]^2}.$$

Отсюда следует, что с увеличением  $|m|$  увеличивается  $\Delta_{l,m}^{(1)}$ . Кроме того, величина скачка для положительных  $m$  больше, чем для отрицательных  $m$  с одинаковым  $|m|$ . Из предыдущей формулы следует, что увеличение поля приводит к увеличению величины скачка для  $m > 0$  и уменьшению скачка для  $m < 0$  (Рис. 3.12(b)).

Рассмотрим скачки второго типа. Скачки этого типа возникают только в зависимости поглощения от магнитного поля, когда с изменением поля электронные энергетические уровни пересекают химический потенциал. Химический потенциал могут пересечь только уровни  $l_0$ -й или  $(l_0 + 1)$ -й оболочки. Так положение скачков, обусловленных пересечением уровней  $l_0$ -й оболочки с химическим потенциалом, определяется из условия  $\mu = E_{l_0, m_0}$ . При таких пересечениях квантовое число  $m_0$  изменяется на единицу. Отметим, что только первые слагаемые в (3.20) и (3.21), ответственные за образование третьего и четвертого пиков, зависят от квантового числа  $m_0$ , а вторые слагаемые в этих уравнениях, которые описывают образование первого и второго пиков, не зависят от этого



квантового числа. Поэтому скачки второго типа существенны только в области третьего и четвертого резонансных пиков.

Найдем изменение интенсивностей пиков поглощения, когда  $m_0 > 0$ . При пересечении химического потенциала с энергетическим уровнем  $l_0$ -й оболочки квантовое число  $m_0$  уменьшается на единицу. Из (3.24)–(3.25) следует, что в случае нулевой температуры изменение интенсивностей третьего и четвертого пиков равно

$$\Delta_{l_0, m_0}^{(2)} \approx -\frac{(l_0 \mp \omega_c/2\Omega)^2 (l_0 \mp m_0 + 1)(l_0 \mp m_0 + 2)}{(2l_0 + 1)(2l_0 + 3)(l_0 + 1 \mp \omega_c/2\Omega)} \quad (3.29)$$

(верхний знак относится к скачку на третьем пике). Из (3.28) и (3.29) следует, что первый и второй пики при этом увеличиваются, а третий и четвертый уменьшаются (Рис. 3.11 и 3.13).

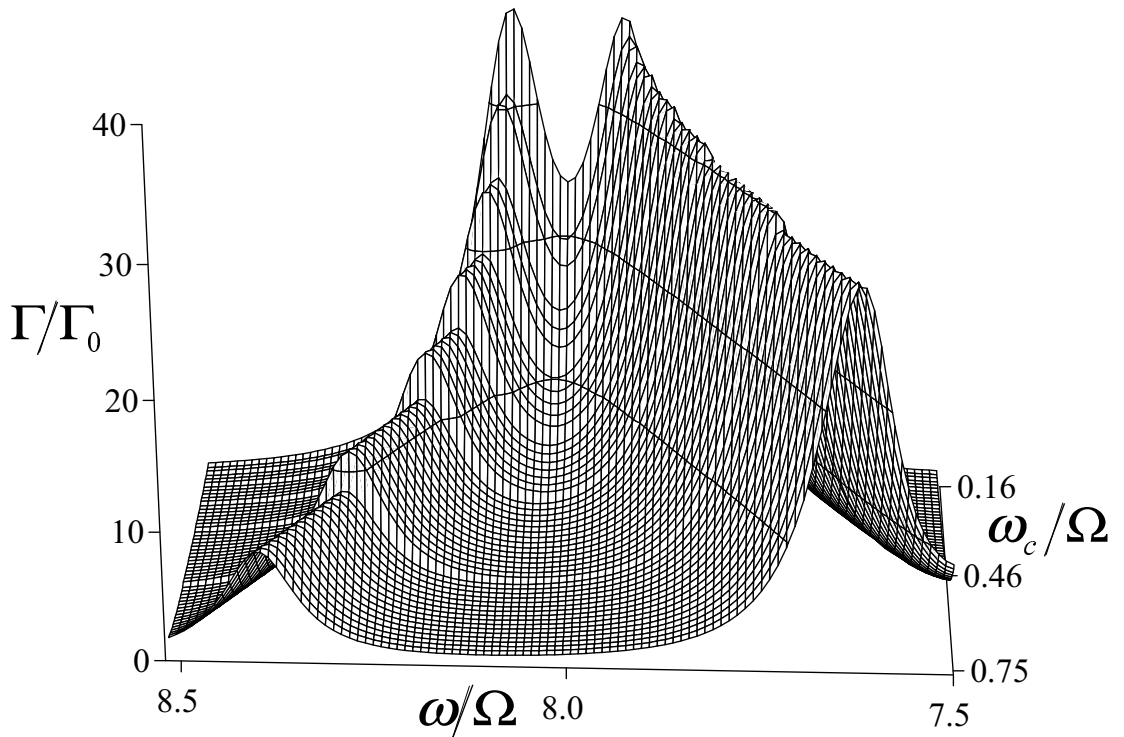


Рис. 3.13. Зависимость поглощения наносферой от частоты излучения и магнитного поля;  $R = 10^{-5}$  см,  $T = 0$  К,  $\tau = 10^{-10}$  с,  $\mu = 5.22 \times 10^{-15}$  эрг,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фарадея). Показаны третий и четвертый пики. На рисунке видны скачки второго типа.

Если же  $m_0 < -1$ , при пересечении химического потенциала энергетическим уровнем  $l_0$ -й оболочки квантовое число  $m_0$  увеличивается на

единицу. В этом случае интенсивности соответственно третьего и четвертого пиков изменяются на величины  $-\Delta_{l,m_0+1}^{(2)}$ , поэтому, согласно формулам (3.28) и (3.29), первый и второй пики уменьшаются, а третий и четвертый увеличиваются.

Рассмотрим теперь частный случай конфигурации Фойхта, когда  $\mathbf{e}_k \parallel \mathbf{V}$ . В этом случае  $\mathbf{e}_k(\mathbf{p} + |e|\mathbf{A}/c) = p_z$ . Тогда матричные элементы перехода в дипольном приближении имеют вид (3.1). Из (3.1) следует, что в дипольном приближении переходы возможны только между уровнями соседних оболочек ( $l' = l \pm 1$ ) с одинаковыми магнитными квантовыми числами ( $m' = m$ ). Таким образом, на кривой поглощения возникают только  $\pi$ -компоненты резонансных пиков.

Подставляя (3.1) в (1.1), получим

$$\Gamma_\pi = \frac{\pi e^2}{cm^* R^2 \sqrt{\varepsilon(\omega)}} \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_0(E_{l,m}) [1 - f_0(E_{l,m} + \hbar\omega)] \times \\ \times \left[ \delta(\omega + \Omega l) (l+1)^2 \frac{l^2 - m^2}{4l^2 - 1} + \delta[\omega - \Omega(l+1)] l^2 \frac{(l+1)^2 - m^2}{4(l+1)^2 - 1} \right] \quad (3.30)$$

Как видно из (3.30), зависимость  $\Gamma_\pi(\omega)$  имеет резонансный характер. Резонансы возникают при частотах электромагнитного излучения  $\omega = \Omega(l+1)$  для тех значений  $l$ , при которых  $f_0(E_l) \gg f_0(E_l + \hbar\Omega(l+1))$ .

Учитывая размытие резонансов рассеянием по формуле (3.3), поглощение можно представить в виде суммы двух слагаемых:  $\Gamma_\pi = \Gamma_1 + \Gamma_2$ , где

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0} = 4 \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{(l+1)^2 (l^2 - m^2)}{4l^2 - 1} \frac{f_0(E_{l,m}) [1 - f_0(E_{l,m} + \hbar\omega)]}{1 + \tau^2 (\omega + \Omega l)^2}, \\ \frac{\Gamma_2}{\Gamma_0} = 4 \frac{\Omega}{\omega} \left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l^2 [(l+1)^2 - m^2]}{4(l+1)^2 - 1} \frac{f_0(E_{l,m}) [1 - f_0(E_{l,m} + \hbar\omega)]}{1 + \tau^2 (\omega - \Omega(l+1))^2}.$$

Нерезонансный член  $\Gamma_1$  описывает процессы, связанные с эмиссией фотонов, причем вблизи точки резонанса  $\Gamma_1/\Gamma_2 = O(1/(\tau\omega)^2)$ . Следовательно, в случае высокочастотного поля, вкладом  $\Gamma_1$  в поглощение в окрестности точки резонанса можно пренебречь. Опустив нерезонансный

член и отбросив экспоненциально малый член  $\sim \exp(-\hbar\omega/T)$ , получим

$$\frac{\Gamma_\pi}{\Gamma_0} = 4\frac{\Omega}{\omega} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{l^2[(l+1)^2 - m^2] f_0(E_{l,m}) [1 - f_0(E_{l,m} + \hbar\omega)]}{4(l+1)^2 - 1} \frac{1}{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l+1)]^2}. \quad (3.31)$$

Как уже отмечалось выше на кривой поглощения возникают только  $\pi$ -компоненты резонансных пиков, причем при низкой температуре резонансы в поглощении возникают только при переходах  $(l_0, m) \rightarrow (l_0 + 1, m)$  и  $(l_0 - 1, m) \rightarrow (l_0, m)$ . Таким образом, резонансные частоты равны  $\omega_1 = \Omega l_0$  и  $\omega_2 = \Omega(l_0 + 1)$ .

Оценим поглощение при нулевой температуре. В окрестности резонанса в (3.31) существенны только слагаемые с  $l = l_0 - 1, l_0$ . С учетом этого получим

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_\pi(T=0)}{\Gamma_0} \approx & 4\frac{\Omega}{\omega} \left\{ \frac{l_0^2(l_0 + m_0 + 1)(l_0 + m_0 + 2)(4l_0 - 2m_0 + 3)}{6(2l_0 + 1)(2l_0 + 3)\{1 + \tau^2[\omega - \Omega(l_0 + 1)]^2\}} + \right. \\ & \left. + \frac{(l_0 - 1)^2}{(2l_0 - 1)(2l_0 + 1)[1 + \tau^2(\omega - \Omega l_0)^2]} \times \right. \\ & \left. \times \sum_{m=-l_0+1}^{l_0-1} (l_0^2 - m^2) \Theta(E_{l_0-1,m} + \hbar\omega - \mu) \right\}. \quad (3.32) \end{aligned}$$

Обозначим относительную интенсивность пика поглощения  $\Gamma_\pi/\Gamma_0$  при  $\omega_1 = \Omega l_0$  через  $I_\pi^{(1)}$ , а при  $\omega_2 = \Omega(l_0 + 1)$  — через  $I_\pi^{(2)}$ . Оценим интенсивность пиков, отбрасывая слагаемые порядка  $(\tau\Omega)^{-2}$ ,

$$I_\pi^{(1)}(T=0) \approx \frac{2(l_0 - 1)^2(l_0 - m_0 - 1)(l_0 - m_0)(4l_0 + 2m_0 + 1)}{3l_0(2l_0 - 1)(2l_0 + 1)}, \quad (3.33)$$

$$I_\pi^{(2)}(T=0) \approx \frac{2l_0^2(l_0 + m_0 + 1)(l_0 + m_0 + 2)(4l_0 - 2m_0 + 3)}{3(l_0 + 1)(2l_0 + 1)(2l_0 + 3)}. \quad (3.34)$$

Численный анализ показал, что второй пик больше первого при  $m_0 \geq -1$ , а при  $m_0 < -1$  первый пик больше второго. Отметим, что число переходов  $l_0 \rightarrow (l_0 + 1)$  больше числа переходов  $(l_0 - 1) \rightarrow l_0$  при  $m_0 \geq 0$ .

Заметим, что увеличение температуры приводит к увеличению интенсивности большего пика и уменьшению интенсивности меньшего пика при  $m_0 = -1$ . При других значениях  $m_0$  увеличение температуры приводит к увеличению интенсивности меньшего и уменьшению интенсивности большего пиков (Рис. 3.14).

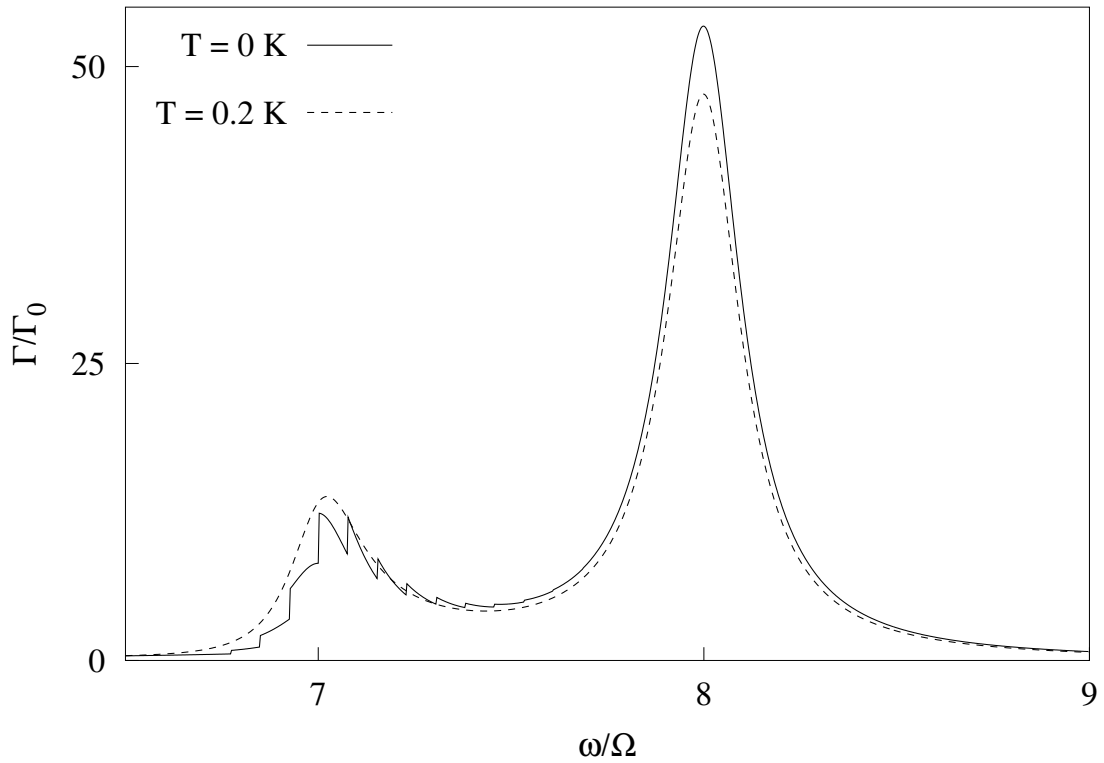


Рис. 3.14. Изменение интенсивностей пиков поглощения с увеличением температуры;  $R = 10^{-5}$  см,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с,  $\mu = 5.161 \times 10^{-15}$  эрг,  $\omega_c/\Omega = 0.15$ ,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фойхта).

Исследуем форму и положение пиков. Величины резонансных частот полностью определяются химическим потенциалом и радиусом сферы, поскольку из (3.32) следует, что резонансы возникают при частотах  $\omega_1 = \Omega l_0$  и  $\omega_2 = \Omega(l_0 + 1)$ , следовательно, зависят от  $R$  и  $l_0$ . Значение  $l_0$ , в свою очередь, определяется химическим потенциалом. Увеличение магнитного поля может привести к пересечениям химического потенциала энергетическими уровнями электронов. Когда  $\mu$  пересекают уровни оболочки с номером  $l_0$ , изменяется интенсивность, но положение пика не изменяется. Если  $m_0 = l_0$  ( $l_0$ -я оболочка полностью заполнена) или  $m_0 = l_0 - 1$ , то, как следует из (3.33),  $I_\pi^{(1)} = 0$ , и на кривой поглощения имеется один резонансный пик при частоте  $\omega = \Omega(l_0 + 1)$ . Если при увеличении магнитного поля уровни  $(l_0 + 1)$ -й оболочки пересекают химический потенциал, то на кривой поглощения возникает новый пик (Рис. 3.15).

Положения скачков первого типа, также как для конфигурации

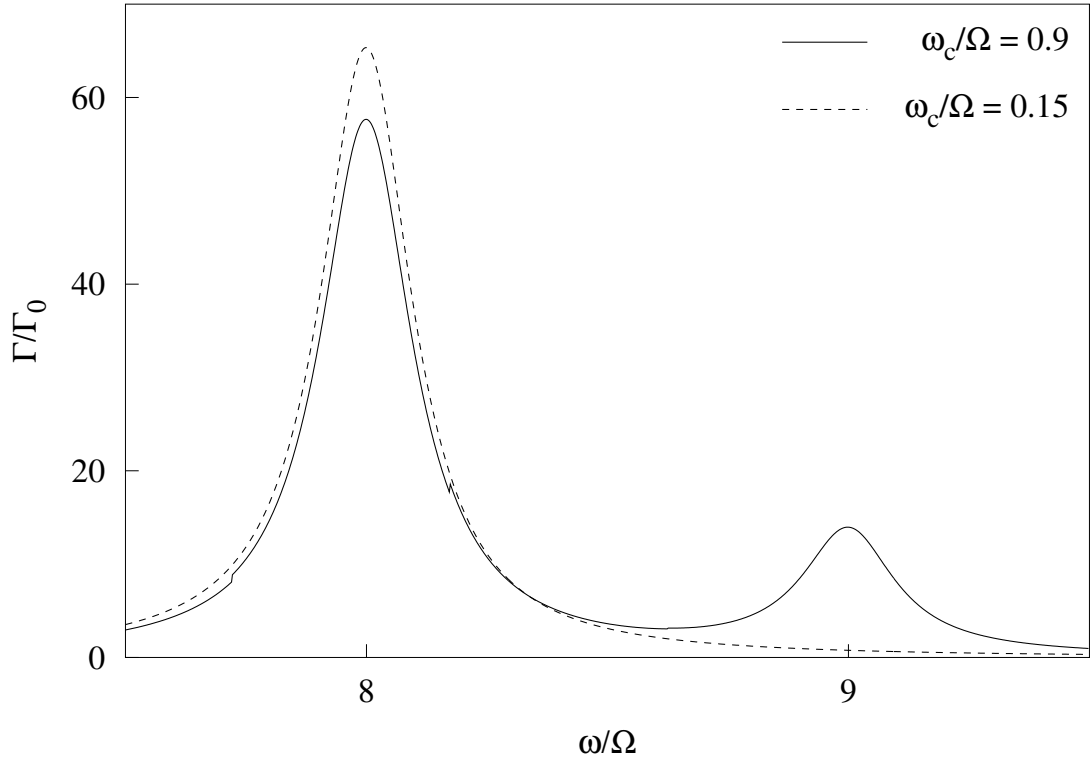


Рис. 3.15. Возникновение нового резонансного пика с увеличением магнитного поля;  $R = 10^{-5}$  см,  $T = 0$  К,  $\tau = 5 \times 10^{-11}$  с,  $\mu = 6.2 \times 10^{-15}$  эрг,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фойхта).

Фарадея, определяется уравнением (3.26). Как видно из этого уравнения, положение скачка  $(l, 0)$  не зависит от магнитного поля. Так как расстояние между соседними скачками отдельной серии равно  $\omega_c/2$ , то с увеличением магнитного поля положение скачков с  $m > 0$  сдвигается в низкочастотную область, а с  $m < 0$  в высокочастотную область относительно скачка  $(l, 0)$ . Заметим, что серия скачков с  $l = l_0 - 1$  возникает в области первого резонанса, а остальные серии возникают на правом крыле второго пика. Отметим, что увеличение температуры сильно замыкает скачки (Рис. 3.14).

Рассмотрим серию скачков, вызванных пересечением  $\mu - \hbar\omega$  уровнями оболочки с номером  $(l_0 - 1)$ . Из условия возникновения скачков (3.26) и из определения квантового числа  $m_0$ :  $E_{l_0, m_0} \leq \mu < E_{l_0, m_0+1}$  ( $m_0 \neq l_0$ ) находим, что частота при которой возникают скачки удовлетворяет следующему двойному неравенству:

$$\Omega l_0 + \omega_c(m_0 - m)/2 \leq \omega_{jump}(l_0 - 1, m) < \Omega l_0 + \omega_c(m_0 - m + 1)/2. \quad (3.35)$$

Отсюда следует, что скачки  $(l_0 - 1)$ -й серии возникают в области первого пика, причем скачки с  $m \leq m_0$  возникают правее первой резонансной частоты ( $\omega_{jump}(l_0 - 1, m) \geq \Omega l_0$ ), а скачки с  $m > m_0$  — левее первой резонансной частоты ( $\omega_{jump}(l_0 - 1, m) < \Omega l_0$ ).

Когда уровни  $l_0$ -й оболочки пересекают химический потенциал, частота

$\omega_{jump}(l_0 - 1, m_0) = \Omega l_0$ . Таким образом, если с увеличением поля положение скачка  $(l_0 - 1)$ -й серии пересечет первую резонансную частоту, то при этом изменяется квантовое число  $m_0$  и изменяется интенсивность пиков. При  $m_0 = 0, -1$  скачки с  $m > 0$  сдвигаются влево, а скачки с  $m < 0$  — вправо относительно первой резонансной частоты (скачок с  $m = 0$  не изменяет своего положения) с увеличением магнитного поля.

Оценим относительную величину скачка первого типа  $\Delta_{l,m}^{(1)}$  при близких к нулю температурах

$$\Delta_{l,m}^{(1)} \approx \frac{4\Omega l^2[(l+1)^2 - m^2]}{[\mu/\hbar - \Omega l(l+1)/2 - \omega_c m/2](2l+1)(2l+3)} \times \frac{1}{1 + \tau^2[\mu/\hbar - \Omega l(l+1)(l+2)/2 - \omega_c m/2]^2}. \quad (3.36)$$

Из (3.36) следует, что чем ближе скачок  $(l_0 - 1)$ -й серии к первой резонансной частоте, тем больше величина скачка. Для тех скачков, которые магнитное поле “сдвигает” к резонансной частоте, величина скачка увеличивается с полем, а для других — уменьшается. При  $m_0 > 0$  с увеличением поля положение скачка  $(l_0 - 1, m_0)$  пересекает первую резонансную частоту. В результате, как следует из (3.36), зависимость поглощения от поля в точке первого максимума ( $\omega_{jump}(l_0 - 1, m_0) = \Omega l_0$ ) испытывает скачек величиной

$$\Delta_{l_0-1, m_0}^{(1)} \approx \frac{4(l_0 - 1)^2(l_0^2 - m_0^2)}{l_0(2l_0 - 1)(2l_0 + 1)}. \quad (3.37)$$

Число скачков в интенсивности первого пика равно  $m_0|_{B=0}$ .

Если  $m_0 < -1$ , то с увеличением поля первую резонансную частоту пересекает скачек  $(l_0 - 1, m_0 + 1)$ , а скачек в точке первого максимума равен  $-\Delta_{l_0-1, m_0+1}^{(1)}$ . Число скачков в интенсивности первого пика равно

$$-m_0|_{B=0} + 1.$$

Рассмотрим скачки второго типа, возникающие в зависимости поглощения от магнитного поля при пересечениях уровней  $l_0$ -й оболочки с химическим потенциалом. При таких пересечениях квантовое число  $m_0$  изменяется на единицу. Отметим, что только первое слагаемое в (3.32), ответственное за образование второго пика, зависит от квантового числа  $m_0$ , а второе слагаемое, которое ответственно за образование первого пика, не зависит от этого квантового числа. Поэтому скачки второго типа существенны только в области второго резонансного пика.

Как видно из (3.33) и (3.34), при  $T = 0$  интенсивности пиков не изменяются с изменением поля, в области где нет пересечений энергетических уровней с химическим потенциалом. Если  $m_0 = 0$  или  $m_0 = -1$ , то пересечений уровней с химическим потенциалом нет (не изменяется квантовое число  $m_0$ ), и интенсивности пиков не зависят от поля (в рассматриваемой области изменения полей).

Рассмотрим случай, когда  $m_0 > 0$ . При пересечении энергетических уровней  $l_0$ -й оболочки с химическим потенциалом квантовое число  $m_0$  уменьшается на единицу. Из (3.33) следует, что относительная величина скачка второго типа в точке второго максимума поглощения

$$\Delta_{l_0, m_0}^{(2)} \approx -\frac{4l_0^2[(l_0 + 1)^2 - m_0^2]}{(l_0 + 1)(2l_0 + 1)(2l_0 + 3)}. \quad (3.38)$$

Как следует из (3.37) и (3.38), при  $m_0 > 0$  интенсивность первого пика увеличивается, а интенсивность второго уменьшается с увеличением магнитного поля. Число скачков второго типа в интенсивности второго пика равно  $m_0|_{B=0}$ .

Если  $m_0 < -1$ , то при пересечении химического потенциала энергетическим уровнем  $l_0$ -й оболочки квантовое число  $m_0$  увеличивается на единицу. В этом случае величины скачков в точках максимумов поглощения равны  $-\Delta_{l, m_0+1}^{(i)}$  ( $i$  — номер резонансного пика). Отсюда ясно, что при  $m_0 < -1$  с увеличением поля интенсивность первого пика уменьшается, а второго — увеличивается. Число скачков второго типа в интенсивности

второго пика равно  $-m_0|_{B=0} + 1$ .

В конфигурации Фойхта при произвольном направлении вектора поляризации относительно магнитного поля ( $\mathbf{e}_k = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ ) поглощение электромагнитного излучения наносферой можно представить в виде

$$\Gamma = \cos^2 \alpha \Gamma_\pi + \sin^2 \alpha \Gamma_\sigma, \quad (3.39)$$

где  $\Gamma_\pi$  определяется формулой (3.31),  $\Gamma_\sigma$  — формулой (3.19).

Как видно из (3.31) и (3.39), кривая поглощения содержит шесть резонансных пиков: два пика —  $\pi$ -компоненты ( $\omega_2 = \Omega l_0$  и  $\omega_5 = \Omega(l_0 + 1)$ ), и четыре пика —  $\sigma$ -компоненты резонансных пиков ( $\omega_{1,3} = \Omega l_0 \mp \omega_c/2$  и  $\omega_{4,6} = \Omega(l_0 + 1) \mp \omega_c/2$ ) (Рис. 3.16). Таким образом, положение  $\pi$ -компонент

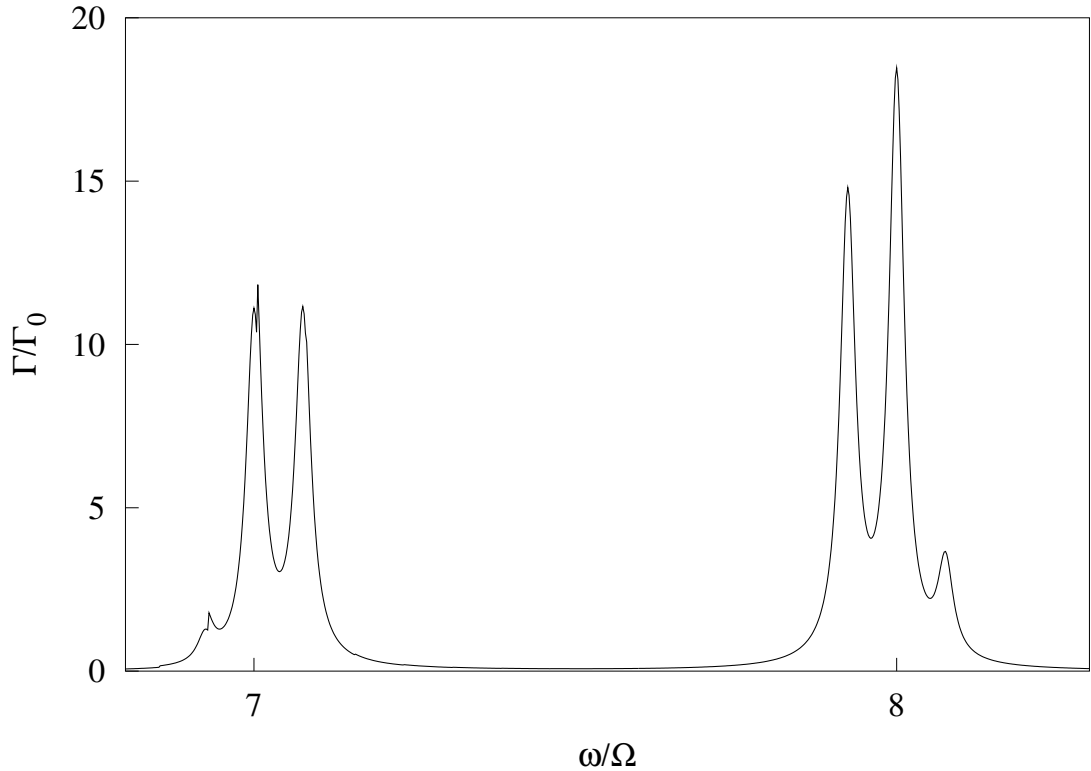


Рис. 3.16. Зависимость поглощения наносферой от частоты излучения;  $R = 10^{-5}$  см,  $T = 0$  К,  $\tau = 4 \times 10^{-10}$  с,  $\mu = 5.1 \times 10^{-15}$  эрг,  $\omega_c/\Omega = 0.15$ ,  $\alpha = \pi/4$ ,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фойхта).

(второго и пятого пиков) не изменяется с изменением поля, в то время как  $\omega_2 - \omega_1 = \omega_3 - \omega_2 = \omega_5 - \omega_4 = \omega_6 - \omega_5 = \omega_c/2$  (Рис. 3.17).

Из Рис. 3.16 видно, что при малых магнитных полях на кривой



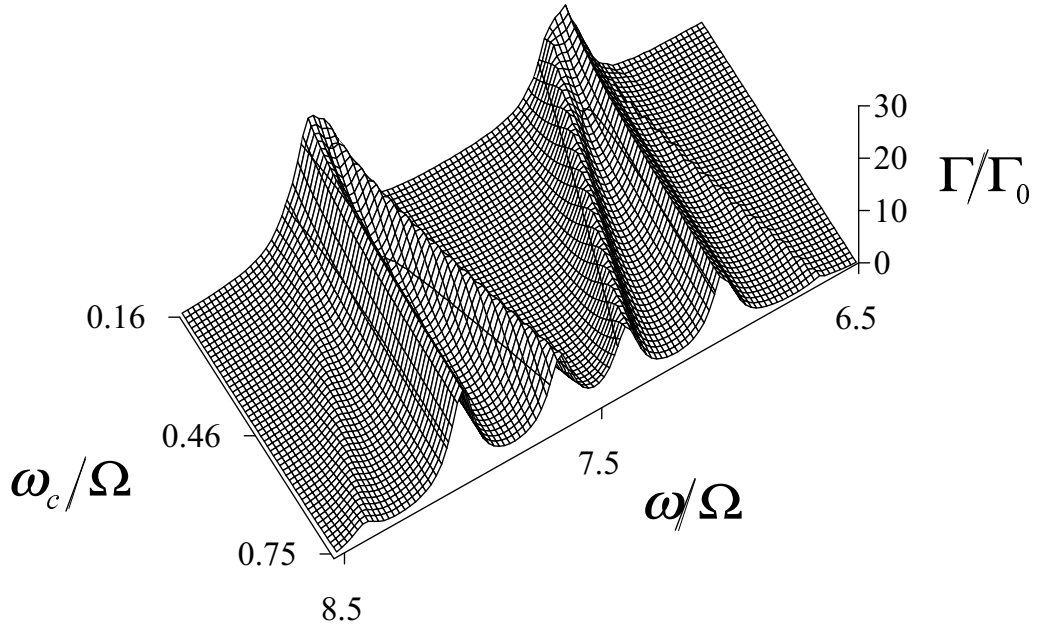


Рис. 3.17. Зависимость поглощения наносферой от частоты излучения и магнитного поля;  $R = 10^{-5}$  см,  $T = 0$  К,  $\tau = 10^{-10}$  с,  $\mu = 5.12 \times 10^{-15}$  эрг,  $\alpha = \pi/4$ ,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фойхта).

поглощения имеются два триплета. Увеличение поля приводит к увеличению расстояния между пиками в триплете (Рис. 3.17), а при  $\omega_c = \Omega$  третий и четвертый пики сливаются в один.

Интенсивности пиков равны  $I_1 = \sin^2 \alpha I_\sigma^{(1)}$ ,  $I_2 = \cos^2 \alpha I_\pi^{(1)}$ ,  $I_3 = \sin^2 \alpha I_\sigma^{(2)}$ ,  $I_4 = \sin^2 \alpha I_\sigma^{(3)}$ ,  $I_5 = \cos^2 \alpha I_\pi^{(2)}$ ,  $I_6 = \sin^2 \alpha I_\sigma^{(4)}$  (в случае когда пики хорошо разрешены, т.е. когда  $\omega_c \tau / 2 \gg 1$  и  $\omega_c \neq \Omega$ ). Зависимость поглощения от угла  $\alpha$  и от частоты  $\omega$  показана на Рис. 3.18.

В случае, когда пики хорошо разрешены, интенсивности второго и пятого пиков не изменяются с изменением величины магнитного поля, а поведение остальных пиков такое же как в случае фарадеевской конфигурации, то есть интенсивности первого и четвертого пиков уменьшаются, а третьего и шестого — возрастают с увеличением магнитного поля.

В заключении приведем основные результаты, полученные в этом разделе. Как отмечалось выше, при фарадеевской конфигурации на кри-

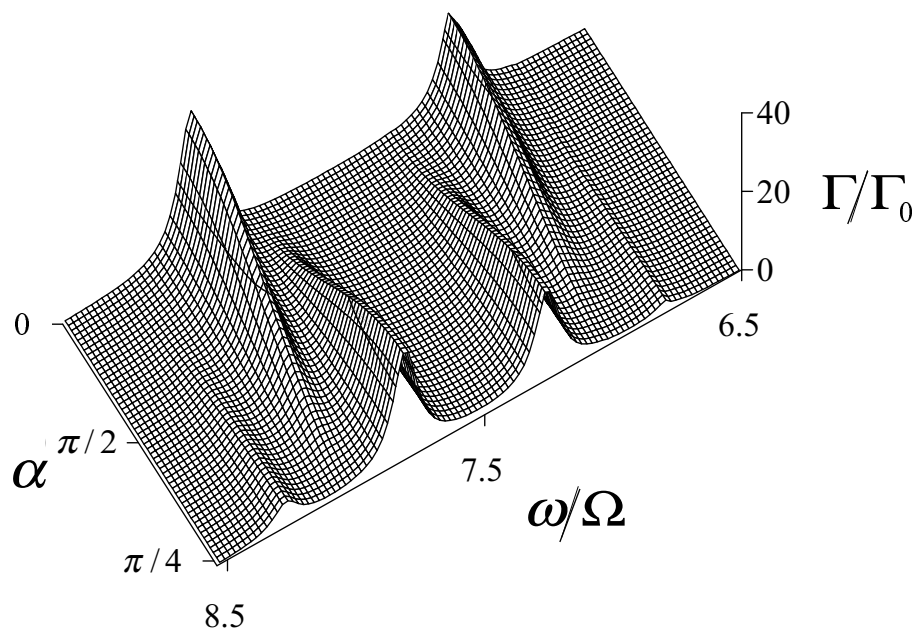


Рис. 3.18. Зависимость поглощения наносферой от частоты излучения и угла между вектором магнитного поля и вектором поляризации фотона;  $R = 10^{-5}$  см,  $T = 0$  К,  $\tau = 10^{-10}$  с,  $\mu = 5.12 \times 10^{-15}$  эрг,  $\omega_c/\Omega = 0.46$ ,  $l_0 = 7$  (конфигурация Фойхта).

вой поглощения имеются четыре пика, причем расстояние между первым и вторым, а также между третьим и четвертым равно циклотронной частоте, и положение пиков линейно зависит от поля.

В конфигурации Фойхта, когда магнитное поле направлено произвольно относительно вектора поляризации фотона, кривая поглощения содержит шесть резонансных пиков: два пика —  $\pi$ -компоненты (возникают вследствие электронных переходов  $m \rightarrow m$ ) и четыре пика —  $\sigma$ -компоненты резонансных пиков (возникают вследствие электронных переходов  $m \rightarrow m \pm 1$ ).

В частном случае конфигурации Фойхта, когда вектор поляризации фотона параллелен магнитному полю, при низких температурах на кривой поглощения имеются только две  $\pi$ -компоненты резонансных пиков, положение которых не зависит от магнитного поля. При низких температурах интенсивности пиков не изменяются с ростом поля, в области где

нет пересечений энергетических уровней с химическим потенциалом.

Для всех рассмотренных конфигураций магнитного поля и вектора поляризации фотона, на кривой поглощения имеются скачки двух различных типов. Скачки первого типа обусловлены пересечениями уровня  $\mu - \hbar\omega$  с энергетическими уровнями электронов, и их положение зависит от частоты электромагнитного излучения и магнитного поля (формула (3.26)). Скачки второго типа возникают вследствие пересечений энергетических уровней электронов с химическим потенциалом  $\mu$ , и положение этих скачков зависит только от магнитного поля (условие возникновения этих скачков  $\mu = E_{l,m}$ ).

Скачки первого типа возникают сериями. Каждая серия скачков соответствует пересечениям уровней отдельной оболочки с  $\mu - \hbar\omega$ , и количество скачков в каждой серии равно количеству уровней в соответствующей оболочке. Серия скачков с номером  $l_0 - 1$  возникает в области первого и второго резонансов в фарадеевском случае, и в области первого, второго и третьего резонансов в фойхтовском случае. Остальные серии возникают на правом крыле последнего резонансного пика.

Скачки второго типа существенны только для третьего и четвертого пиков в конфигурации Фарадея, и для четвертого, пятого и шестого резонансных пиков в конфигурации Фойхта (наибольшие величины скачков имеют место в максимумах поглощения). В зависимости от знака квантового числа  $m_0$  величины скачков второго типа могут быть как отрицательными, так и положительными.

Отметим, что скачки обоих типов существенно замываются даже довольно низкой температурой.

Численный анализ показал, что в случае изолированной сферы химический потенциал зависит от  $B$  так, что нет пересечений химического потенциала энергетическими уровнями электронов. Поэтому при изменении поля  $B$  не происходит изменения квантовых чисел  $l_0$  и  $m_0$ . В связи с этим, в случае постоянного числа частиц на кривой поглощения возника-

ют только скачки первого типа. Заметим, что положение скачка  $(l, m_0)$  не изменяется с изменением поля, положение скачков с  $m > 0$  сдвигается в низкочастотную область спектра, а с  $m < 0$  — в высокочастотную относительно скачка  $(l, m_0)$  с увеличением магнитного поля. Отметим, что из-за зависимости  $\mu$  от  $T$ , положение скачков первого типа может изменяться с изменением температуры, в отличие от случая постоянного химического потенциала, в котором температура приводит лишь к сглаживанию скачков.

Использованный метод расчета поглощения связан с ограничением  $\omega\tau \gg 1$  [79]. Поэтому переход  $\omega \rightarrow 0$  для получения статистической проводимости  $\sigma_{xx}$  в магнитном поле незаконен. Как отмечалось выше, качественный характер поглощения наносферой аналогичен эффекту Зеемана. Действительно, наносферу можно рассматривать как атом, движение электронов в котором ограничено в очень тонком сферическом слое. Отметим, что применяемый в диссертации метод расчета  $\Gamma$  не позволяет провести исследования предельного перехода к циклотронному резонансу, так как с увеличением радиуса наносферы резонансные пики смещаются в низкочастотную область, и при достаточно больших значениях радиуса кривизны нарушается условие  $\omega\tau \gg 1$  в области резонансов.

## Глава 4

# Поверхность постоянной отрицательной кривизны

### 4.1 Плотность электронных состояний и квантовый эффект Холла

Рассмотрим невзаимодействующие электроны, расположенные на части поверхности постоянной отрицательной кривизны (плоскость Лобачевского) площади  $S$  в магнитном поле  $B$ .

Выберем реализацию плоскости Лобачевского  $L$  в виде верхней полуплоскости Пуанкаре  $L = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$  с метрикой

$$ds^2 = \frac{a^2}{y^2}(dx^2 + dy^2),$$

где  $a$  — радиус кривизны. Таким образом, в случае плоскости Лобачевского гамильтониан (1.3) в калибровке Ландау ( $\mathbf{A} = (Ba^2y^{-1}, 0)$ ) примет вид

$$H = \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \left[ -y^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2) + 2iby\partial_x + b^2 - \frac{1}{4} \right], \quad (4.1)$$

где  $b = eBa^2/\hbar c$ . Спектр этого гамильтониана найден в [97] и состоит из двух частей: дискретного спектра в интервале  $(0, m^*\omega_c^2 a^2/2)$ , состоящего из конечного числа уровней Ландау:

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2, \quad 0 \leq n < |b| - \frac{1}{2}, \quad (4.2)$$

где соответствующие собственные функции

$$\psi_{n,k}(x, y) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{n!(2|b| - 2n - 1)}{2|k|\Gamma(2|b| - n)}} e^{-ikx} e^{-|k|y} (2|k|y)^{|b|-n} L_n^{2|b|-2n-1}(2|k|y),$$

и непрерывного спектра в интервале  $[m^*\omega_c^2 a^2/2, \infty)$ :

$$E(\nu) = \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} (b^2 + \nu^2), \quad 0 \leq \nu < \infty$$

с волновыми функциями

$$\psi_{\nu,k}(x, y) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\nu \operatorname{sh} 2\pi\nu}{2\pi^2|k|}} \left| \Gamma\left(i\nu - |b| + \frac{1}{2}\right) \right| e^{-ikx} W_{|b|,i\nu}(2|k|y).$$

Здесь  $k$  — волновой вектор электрона,  $L_n^m(x)$  — обобщенные полиномы Лагерра,  $W_{n,m}(x)$  — функции Уиттекера. На Рис. 4.1 изображен квадрат модуля волновых функции электрона на псевдосфере. Отметим, что поведение плотности вероятности нахождения электрона на псевдосфере в зависимости от магнитного поля  $b$ , квантовых чисел  $k$ ,  $n$  или  $\nu$  одинаково как для дискретного спектра, так и для непрерывного. А именно, с увеличением квантового числа  $n$  (в случае дискретного спектра) или  $\nu$  (в случае непрерывного спектра) увеличивается число максимумов функции  $|\psi|^2$ . С ростом  $k$  (или с уменьшением магнитного поля) уменьшается амплитуда осцилляций функции  $|\psi|^2$ , и осцилляции сдвигаются по направлению к ребру возврата, при этом уменьшается число максимумов.

Плотность электронных состояний  $n(E)$  на единицу площади определяется стандартным выражением

$$n(E) = \frac{1}{\pi S} \int \operatorname{Im} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}; E + i0) d\mathbf{r},$$

где  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; E)$  — функция Грина гамильтониана. В случае однородных систем перенормированная функция Грина  $G^{ren}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; E)$  совпадает с так называемой функцией Крейна  $Q(E)$ , которая для гамильтониана на плоскости Лобачевского имеет вид [97]

$$Q(E) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} [\psi(t-b) + \psi(t+b) + 2\gamma_E - \ln 4a^2],$$

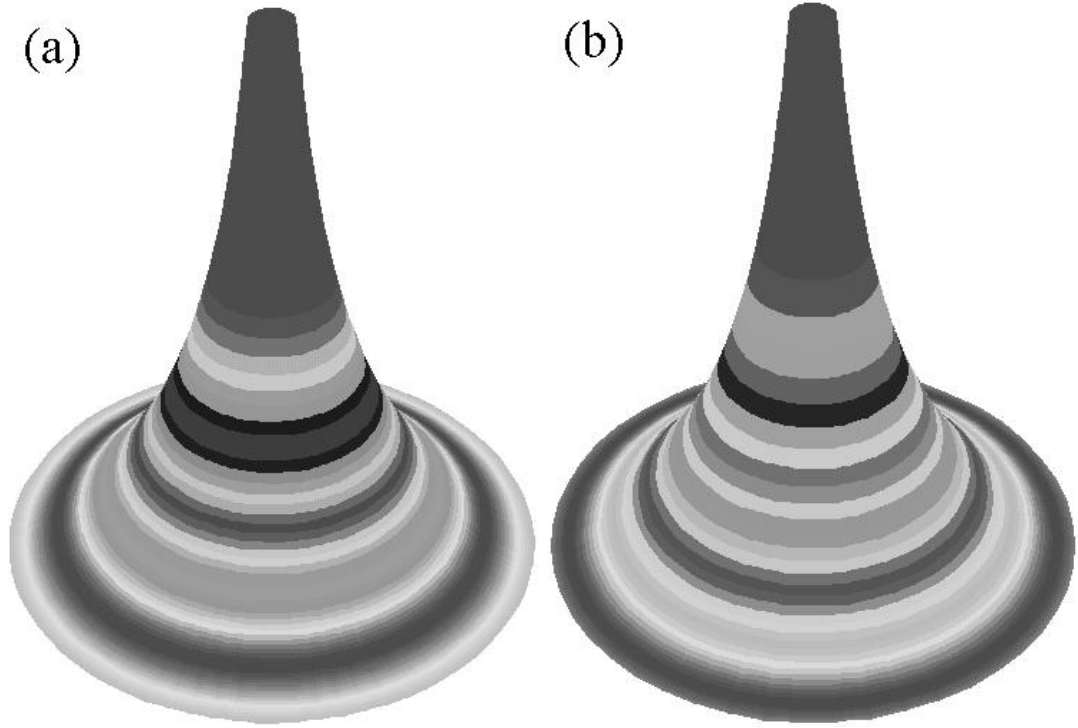


Рис. 4.1. Плотность вероятности нахождения электрона на псевдосфере ( $a = 10^{-5}$  см,  $b = 7$ ,  $k = 4.2 \times 10^5$  см $^{-1}$ ). (а) Дискретный спектр ( $n = 4$ ); (б) непрерывный спектр ( $\nu = 4.1$ ). Области максимумов показаны в светлых тонах.

где  $\psi(z)$  — логарифмическая производная гамма-функции,

$t(E) = 1/2 + \sqrt{b^2 - 2m^*a^2E/\hbar^2}$ ,  $\gamma_E$  — постоянная Эйлера. Используя свойства  $\psi$ -функции и применяя формулу Сохоцкого  $\delta(x) = -(1/\pi) \text{Im}(1/(x + i0))$ , получим выражение для плотности электронных состояний в виде

$$n(E) = \frac{1}{2\pi a^2} \sum_{0 \leq n < |b| - 1/2} \left( |b| - n - \frac{1}{2} \right) \delta(E - E_n) + \frac{m^*}{2\pi \hbar^2} \Theta \left( E - \frac{\hbar^2 b^2}{2m^* a^2} \right) \frac{\sinh 2\pi \sqrt{2m^* a^2 E / \hbar^2 - b^2}}{\cosh 2\pi \sqrt{2m^* a^2 E / \hbar^2 - b^2} + \cos 2\pi b} \quad (4.3)$$

Здесь первое слагаемое соответствует дискретному спектру, а второе — непрерывному.

На Рис. 4.2 и 4.5 показаны зависимости плотности состояний от энергии и магнитного поля. На этих рисунках изображены  $\delta$ -образные пики, соответствующие дискретным уровням; непрерывному спектру соответствует ступенчатая зависимость плотности состояний. Как видно из (4.3), при  $E = \hbar^2 b^2 / 2m^* a^2$  на плато ступени величина плотности состояний стремится к величине  $m^* / 2\pi \hbar^2$  с увеличением энергии или с умень-

шением поля. Отметим, что если значение  $b$  близко к целому числу, ступень является размытой (Рис. 4.2). В случае, когда  $b$  близко к полуцелому числу, на пороге ступени возникает пик (Рис. 4.3). Возникновение этого пика объясняется следующим: при  $b$  равном полуцелому числу и при  $b^2 = 2m^*a^2E/\hbar^2$  (то есть на пороге) знаменатель во втором слагаемом обращается в нуль и возникает бесконечный пик (при  $b$  близком к полуцелому величина пика конечна).

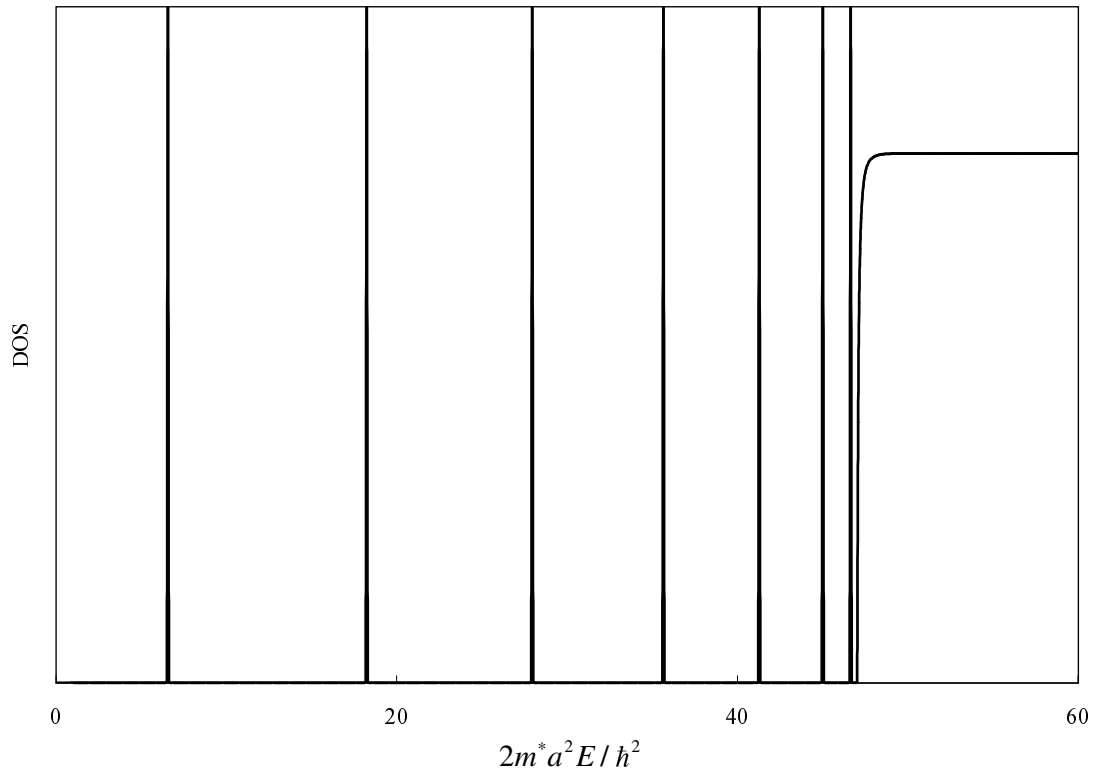


Рис. 4.2. Плотность электронных состояний на поверхности постоянной отрицательной кривизны в зависимости от энергии;  $b = 7$ ,  $a = 3 \times 10^{-6}$  см.

Отметим, что при устремлении радиуса кривизны поверхности постоянной кривизны к бесконечности ( $a \rightarrow \infty$ ) получим известное выражение для плотности состояний на плоской поверхности:

$$n(E) = \frac{|Be|}{2\pi\hbar c} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n).$$

Ниже мы рассмотрим случай малой кривизны и сильного магнитного поля ( $a^2B^2e^2/2m^*c^2 > E_F$ ). В этом случае энергетический спектр только дискретный ниже энергии Ферми  $E_F$ , и второе слагаемое в (4.3)



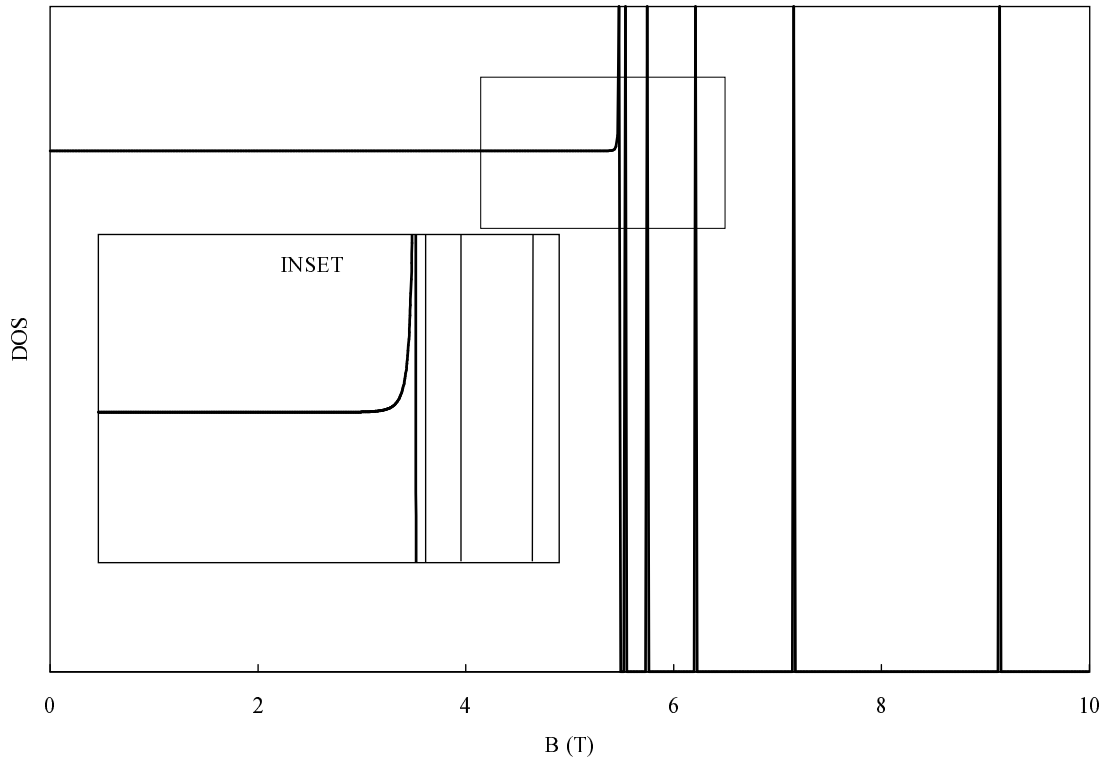


Рис. 4.3. Плотность электронных состояний на поверхности постоянной отрицательной кривизны в зависимости от магнитного поля;  $E/(\hbar^2/2m^*a^2) = 65.25$ ,  $a = 3 \times 10^{-6}$  см. При таком значении энергии порог ступени возникает при  $b = 7.5$ . Область пика на ступени показана на вставке.

равно нулю.

Рассмотрим квантовый эффект Холла на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Для строгой теории квантового эффекта Холла необходимо было бы учесть эффекты электрон-электронного взаимодействия, влияние примесей и дефектов в образце. Наиболее подходящей в этом плане является теория предложенная Лафлином [103]. Необходимо отметить, что для поверхности постоянной отрицательной кривизны построена теория квантового эффекта Холла на основе волновых функций Лафлина [19]. Однако, из-за достаточно сложных волновых функций и спектральных свойств электронов на такой поверхности, в рамках этой теории не удалось получить явные формулы для холловской проводимости, даже качественный анализ квантового эффекта Холла представляется достаточно трудной задачей. В связи с этим, для исследования холловской проводимости на поверхности постоянной отрицательной кривизны

мы вынуждены прибегнуть к более простым моделям и теориям. Наиболее подходящей в этом плане является теория, предложенная Стредой [25]. На основе теории линейного отклика он показал, что когда уровень Ферми находится в лакуне спектра, холловская проводимость при нулевой температуре имеет вид

$$\sigma_{xy}(E_F, 0) = \frac{ec}{S} \frac{\partial N}{\partial B}. \quad (4.4)$$

Здесь число электронных состояний  $N$  ниже уровня Ферми имеет вид

$$N = S \int_{-\infty}^{E_F} n(E) dE,$$

где  $S$  — площадь рассматриваемой части поверхности постоянной отрицательной кривизны. Необходимо отметить, что в общем случае плотность электронных состояний  $n(E)$  на поверхности площади  $S$  будет отличаться от плотности состояний всей поверхности постоянной отрицательной кривизны (формула (4.3)). Это связано с возникновением краевых состояний на границе рассматриваемой части поверхности и с влиянием граничных условий на электронные спектральные свойства системы. Тем не менее, краевыми эффектами можно пренебречь, если длина волны электрона много меньше характеристических размеров системы. Далее в работе мы рассматриваем случай, когда граничные условия практически не влияют на спектральные свойства и плотность электронных состояний можно описывать формулой (4.3). Оценим размеры системы, при которых можно не учитывать краевые эффекты. Для конкретности, рассмотрим образец площади  $S \sim 10^{-9}$  см<sup>2</sup>, обладающий постоянной отрицательной кривизной. Экспериментальные данные об электронных плотностях в двумерном электронном газе позволяют оценить энергию Ферми нашей системы:  $E_F \sim 5 \cdot 10^{-13}$  эрг. Длина волны электрона, который обладает такой энергией, имеет порядок  $10^{-6}$  см. Таким образом, длина волны электрона много меньше характеристических размеров, поэтому краевые эффекты не влияют на физические свойства рассматриваемой системы.

Формула (4.4) является аналогом известной формулы Кубо [106]. Теория Стреды позволяет получить явную аналитическую формулу для

холловской проводимости, провести детальный анализ ширины плато и положения порогов ступеней холловской проводимости, исследовать влияние кривизны поверхности на квантовый эффект Холла. Отметим, что эта формула не учитывает явно примесные эффекты, которые играют определяющую роль в возникновении квантового эффекта Холла. Не смотря на это, так как квантовый эффект Холла имеет фундаментальный характер, то этот эффект может быть объяснен и описан на основе очень простых соображений [1]. С другой стороны, формула Стреды все-таки учитывает не явным образом наличие примесей и неоднородностей в образце, так как предполагается, что уровень Ферми находится на примесных уровнях (то есть в лакуне спектра, между уровнями Ландау).

В случае малой кривизны и сильного магнитного поля ( $a^2 B^2 e^2 / 2m^* c^2 > E_F$ ) с учетом (4.3) получим

$$\begin{aligned} N &= \frac{S}{2\pi a^2} \sum_{0 \leq n < b-1/2} \left( b - n - \frac{1}{2} \right) \Theta \left( \varepsilon_F - b(2n+1) + \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{S}{2\pi a^2} \left[ b + \frac{1}{2} - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F} \right] \left( b - \frac{1}{2} \left[ b + \frac{1}{2} - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F} \right] \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\varepsilon_F = 2m^* a^2 E_F / \hbar^2$ ,  $[x]$  — целая часть числа  $x$  (здесь и далее, для простоты, мы рассматриваем случай  $B > 0$ ).

Легко показать, что в области лакун спектра целая часть числа  $b + 1/2 - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F}$  не изменяется с ростом поля. Тогда, подставляя (4.5) в (4.4), получим

$$\frac{\sigma_{xy}(\varepsilon_F, 0)}{\sigma_0} = - \left[ b + \frac{1}{2} - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F} \right], \quad (4.6)$$

где  $\sigma_0 = e^2/h$ .

Как видно из (4.6), зависимость холловской проводимости от магнитного поля является ступенчатой. В пределе нулевой кривизны ( $a \rightarrow \infty$ ) получается известная формула для холловской проводимости на плоской поверхности:

$$\frac{\sigma_{xy}(E_F, 0)}{\sigma_0} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} - \left[ \frac{1}{2} + \frac{E_F}{\hbar\omega_c} \right].$$

Скачки в проводимости возникают при пересечениях уровня Ферми уровнями Ландау, поэтому положение скачков определяется из условия

$$E_F = \hbar\omega_c \left( n_0 - \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \left( n_0 - \frac{1}{2} \right)^2, \quad (4.7)$$

где  $n_0$  — число полностью заполненных уровней Ландау. Из этой формулы видно, что кривизна поверхности приводит к сдвигу положения скачков в область бóльших магнитных полей относительно положений скачков в случае плоской поверхности. Величина сдвига равна  $\Phi_0(n_0 - 1/2)/4\pi a^2$ , то есть сдвиг положения скачков больше для скачков, соответствующих бóльшему номеру верхнего занятого уровня Ландау (Рис. 4.4).

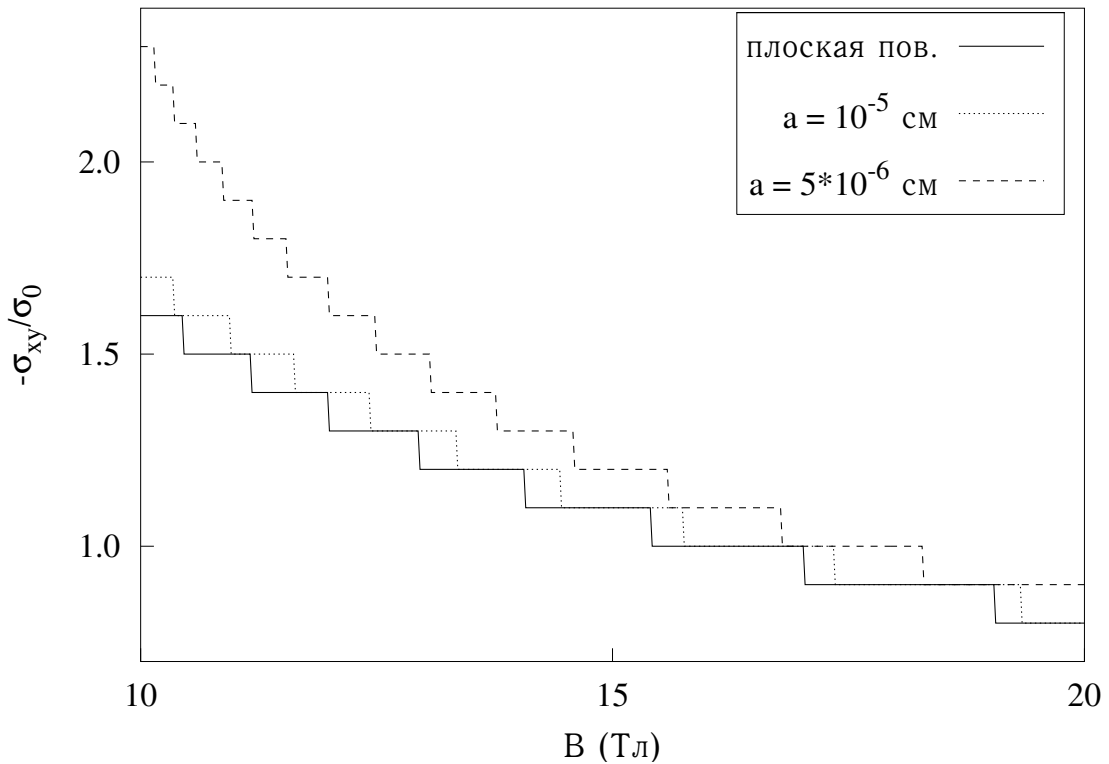


Рис. 4.4. Холловская проводимость в зависимости от магнитного поля;  $T = 0$  К,  $E_F = 5 \times 10^{-13}$  эрг.

Отметим, что в области плато  $\sigma_{xy}(E_F, 0) = -\sigma_0 n_0$ . Из (4.7) следует, что ширина плато равна

$$\Delta B = \frac{m^*c}{|e|\hbar} \left( \frac{E_F}{n_0^2 - 1/4} - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \right), \quad (4.8)$$

то есть плато ступеней для поверхности постоянной отрицательной кривизны меньше плато ступеней для плоской поверхности на величину

$\Phi_0/4\pi a^2$ .

На Рис. 4.5 показаны графики зависимостей  $\sigma_{xy}(B)$  при разных значениях  $E_F$ . Видно, что для бóльших значений энергии Ферми ширина плато ступеней больше, а положение порогов ступеней сдвигается в область бóльших значений магнитного поля.

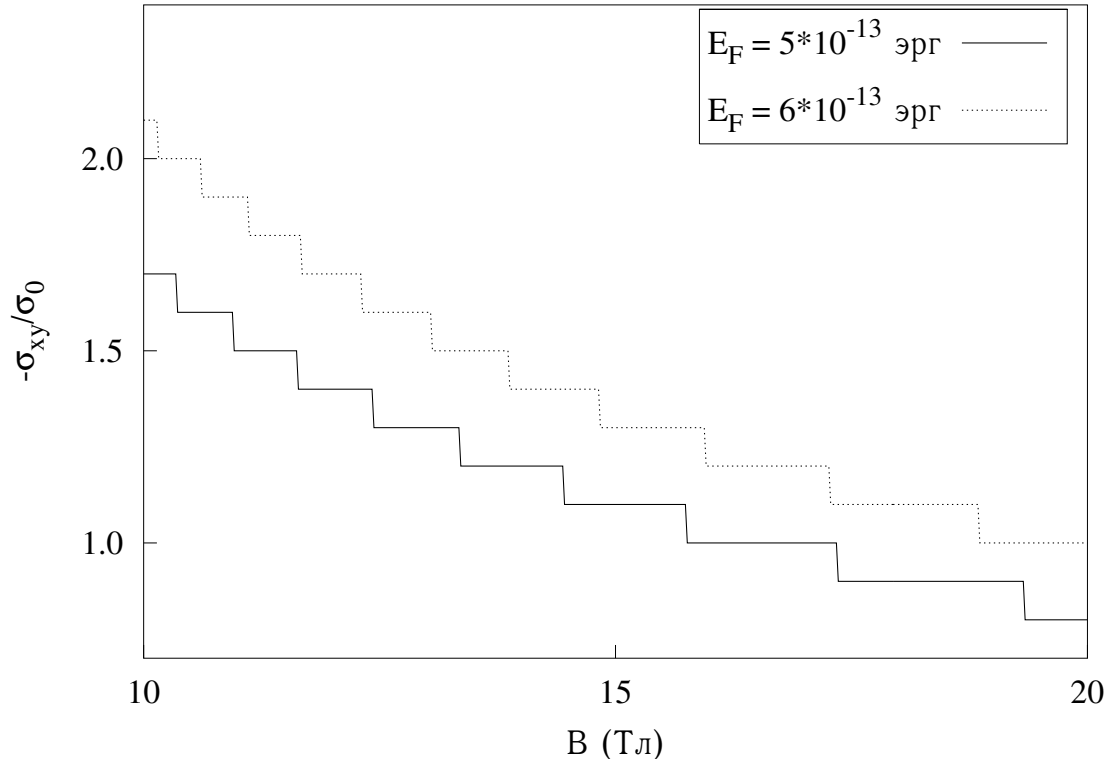


Рис. 4.5. Холловская проводимость в зависимости от магнитного поля;  $T = 0$  К,  $a = 10^{-5}$  см.

Рассмотрим влияние температуры на холловскую проводимость. Зависимость  $\sigma_{xy}$  от температуры  $T$  определяется стандартным выражением

$$\sigma_{xy}(\mu, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{\partial f_0(E)}{\partial E} \right) \sigma_{xy}(E, 0) dE,$$

где  $\sigma_{xy}(E, 0)$  — холловская проводимость при нулевой температуре. В случае сильного магнитного квантования можно пренебречь вкладом в проводимость электронов с энергией  $E \gg E_F$ , находящихся в области

непрерывного спектра. Тогда

$$\frac{\sigma_{xy}(\mu, T)}{\sigma_0} = - \sum_{n=0}^{[b-1/2]} f_0(E_n) + \frac{[b-1/2]}{1 + \exp\{(\hbar^2 b^2 / 2m^* a^2 - \mu) / T\}}. \quad (4.9)$$

Как видно из Рис. 4.6, температура приводит к сглаживанию ступеней холловской проводимости. Размытие существенней для ступеней с меньшим плато.

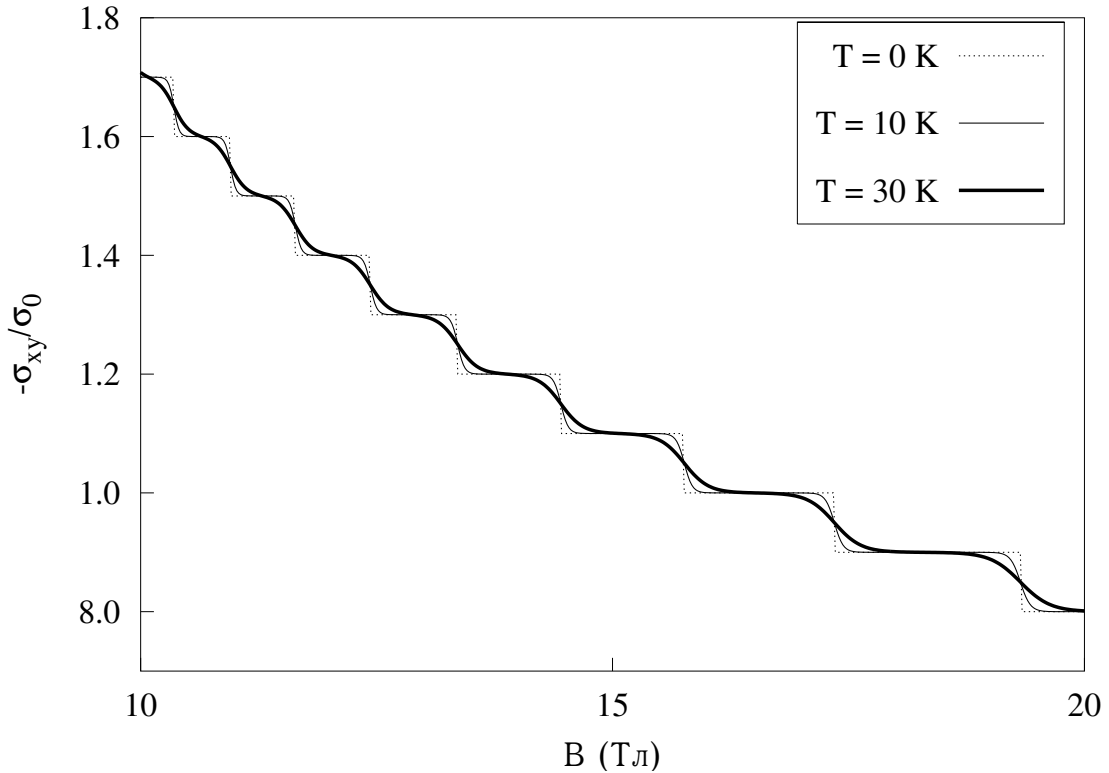


Рис. 4.6. Холловская проводимость в зависимости от магнитного поля;  $\mu = 5 \times 10^{-13}$  эрг,  $a = 10^{-5}$  см.

Рассмотрим зависимость холловской проводимости от химического потенциала. Из (4.7) следует, что кривизна поверхности приводит к сдвигу положения скачков в область меньших значений химического потенциала относительно положения скачков в случае плоской поверхности на величину  $\hbar^2(n_0 - 1/2)^2 / 2m^* a^2$  (Рис. 4.7).

Ширина плато равна

$$\Delta\mu|_{T=0} = \hbar\omega_c - \frac{\hbar^2}{m^* a^2} n_0, \quad (4.10)$$

то есть плато ступеней для поверхности постоянной отрицательной кривизны меньше плато в случае плоской поверхности, причем разность в

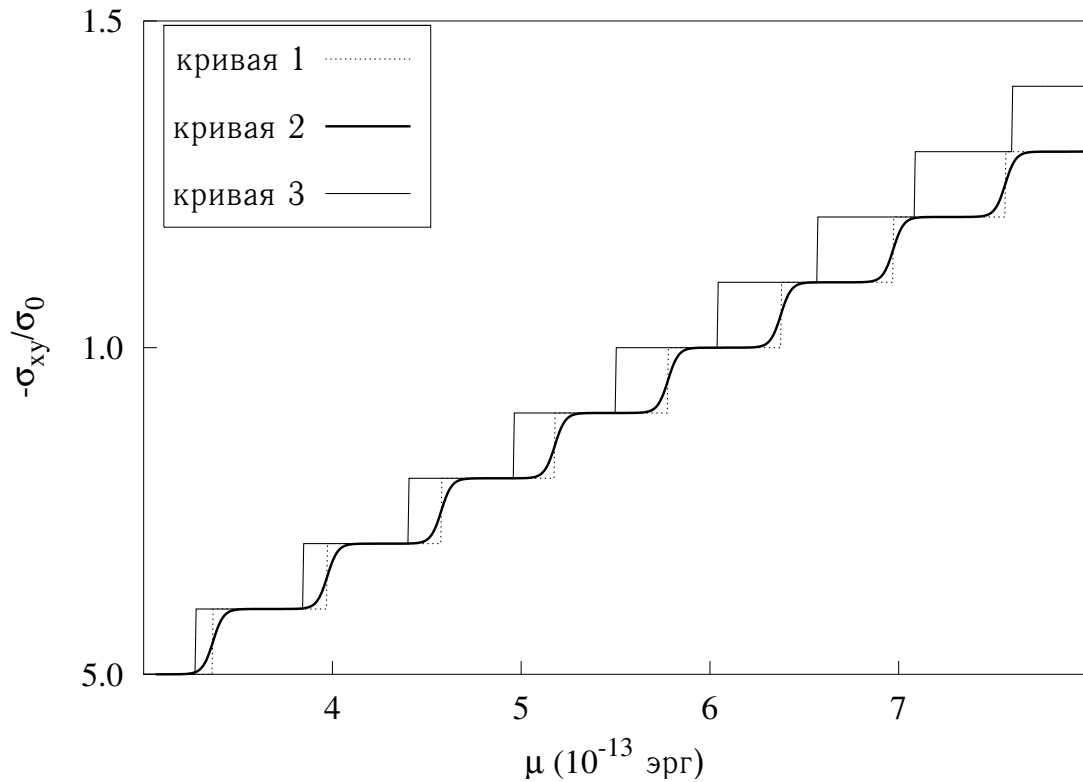


Рис. 4.7. Холловская проводимость в зависимости от химического потенциала в магнитном поле  $B = 20$  Тл; кривая 1:  $T = 0$  К,  $a = 10^{-5}$  см; кривая 2:  $T = 20$  К,  $a = 10^{-5}$  см; кривая 3:  $T = 0$  К,  $a = 5 \times 10^{-6}$  см.

ширине плато линейно зависит от номера верхнего занятого уровня Ландау.

В заключении этого раздела отметим, что кривизна поверхности приводит к изменениям положений порогов и величин плато ступеней. А именно, кривизна поверхности приводит к сдвигу положения скачков зависимости  $\sigma_{xy}(B)$  в область бóльших магнитных полей (Рис. 4.4), а зависимости  $\sigma_{xy}(\mu)$  в область меньших значений  $\mu$  (Рис. 4.7). Заметим, что при нулевой температуре сдвиг положения скачков больше для скачков, соответствующих бóльшим значениям номера верхнего занятого уровня Ландау. Ширина плато ступеней в зависимости  $\sigma_{xy}(B)$  для поверхности постоянной отрицательной кривизны меньше ширины плато ступеней в случае плоской поверхности на величину  $\Phi_0/4\pi a^2$  (уравнение (4.8)). Для графика  $\sigma_{xy}(\mu)$  ширина плато определяется уравнением (4.10), из которого следует, что кривизна поверхности уменьшает ширину плато, причем

разность в ширине плато линейно зависит от номера верхнего занятого уровня Ландау (Рис. 4.7). Влияние температуры электронного газа на холловскую проводимость сводится к сглаживанию ступеней. Отметим, что размытие существенней для ступеней с меньшим плато (Рис. 4.6).

## 4.2 Магнитный момент

Для вычисления магнитного момента воспользуемся стандартной формулой для магнитного момента термодинамической системы при постоянном химическом потенциале:

$$\mathbf{M} = - \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{B}} \right) \Big|_{T, S, \mu}, \quad (4.11)$$

где термодинамический потенциал

$$\Omega(T, \mu) = -TS \int_{-\infty}^{\infty} n(E) \ln \{1 + \exp [(\mu - E) / T]\} dE. \quad (4.12)$$

Здесь  $n(E)$  — плотность электронных состояний единицы площади поверхности двумерного электронного газа на поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Рассмотрим сначала случай нулевой температуры. Подставим формулу для плотности электронных состояний (4.3) в (4.12) и применим формулу суммирования Пуассона для магнитного момента. Тогда, если ниже уровня Ферми лежит как дискретный так и непрерывный спектр, то есть при  $\varepsilon_F \geq b^2$  ( $\varepsilon_F = 2m^*a^2E_F/\hbar^2$ ), магнитный момент двумерного электронного газа на плоскости Лобачевского можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{M(T=0)}{\mu_B} \Big|_{\varepsilon_F \geq b^2} = & \frac{m_e}{m^*} \frac{S}{2\pi a^2} \left\{ -\frac{b}{6} - \frac{3}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \exp[-2\pi k \sqrt{\varepsilon_F - b^2}] \sin 2\pi kb + \right. \\ & + \frac{2}{\pi} \sqrt{\varepsilon_F - b^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \exp[-2\pi k \sqrt{\varepsilon_F - b^2}] \left( b \cos 2\pi kb - \sqrt{\varepsilon_F - b^2} \sin 2\pi kb \right) + \\ & \left. + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \exp[-2\pi k \sqrt{\varepsilon_F - b^2}] \left( b \cos 2\pi kb - 3\sqrt{\varepsilon_F - b^2} \sin 2\pi kb \right) \right\}. \quad (4.13) \end{aligned}$$



В области  $\varepsilon_F \geq b^2$ , как видно из (4.13), зависимость  $M(B)$  является монотонной, так как стоящие под знаками суммы экспоненты резко замывают осцилляции.

При  $\varepsilon_F < b^2$  (в этом случае ниже энергии Ферми лежит только дискретный спектр) магнитный момент имеет вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{M(T=0)}{\mu_B} \right|_{\varepsilon_F < b^2} = & \frac{m_e S}{m^* 2\pi a^2} \left\{ -\frac{b}{6} - \frac{3}{2\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \sin 2\pi k(b - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F}) + \right. \\ & + \frac{1}{\pi^2} (b - 3\sqrt{b^2 - \varepsilon_F}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos 2\pi k(b - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F}) - \\ & \left. - \frac{2}{\pi} \sqrt{b^2 - \varepsilon_F} (b - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin 2\pi k(b - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F}) \right\}. \quad (4.14) \end{aligned}$$

Как видно из (4.14), в области  $\varepsilon_F < b^2$  в зависимости  $M(B)$  присутствует монотонная часть, линейно зависящая от поля, а три суммы ответственны за образование пилообразных пиков.

График зависимости  $M(B)$  показан на Рис. 4.8. Монотонная зависимость  $M(B)$  соответствует случаю, когда ниже уровня Ферми лежат как дискретная часть спектра, так и непрерывная. При увеличении магнитного поля, нижняя граница непрерывного спектра пересекает уровень Ферми (тогда ниже этого уровня лежит только дискретный спектр). В этом случае монотонная зависимость магнитного момента от поля сменяется осцилляционной. Как видно из этого рисунка, при  $\varepsilon_F < b^2$  монотонная часть магнитного момента много меньше амплитуд пилообразных осцилляций. Скачки в зависимости магнитного момента от поля возникают при пересечении уровня Ферми энергетическими уровнями электронов. Так как ниже уровня Ферми лежит конечное число электронных уровней, количество скачков в зависимости магнитного момента от поля будет ограничено и равно количеству электронных уровней, лежащих ниже уровня Ферми.

Рассмотрим более подробно монотонную зависимость  $M(B)$  в области  $\varepsilon_F \geq b^2$ . Из (4.13) легко видно, что в случае  $\varepsilon_F \gg b^2$  экспоненциальные множители в общих членах рядов становятся пренебрежимо

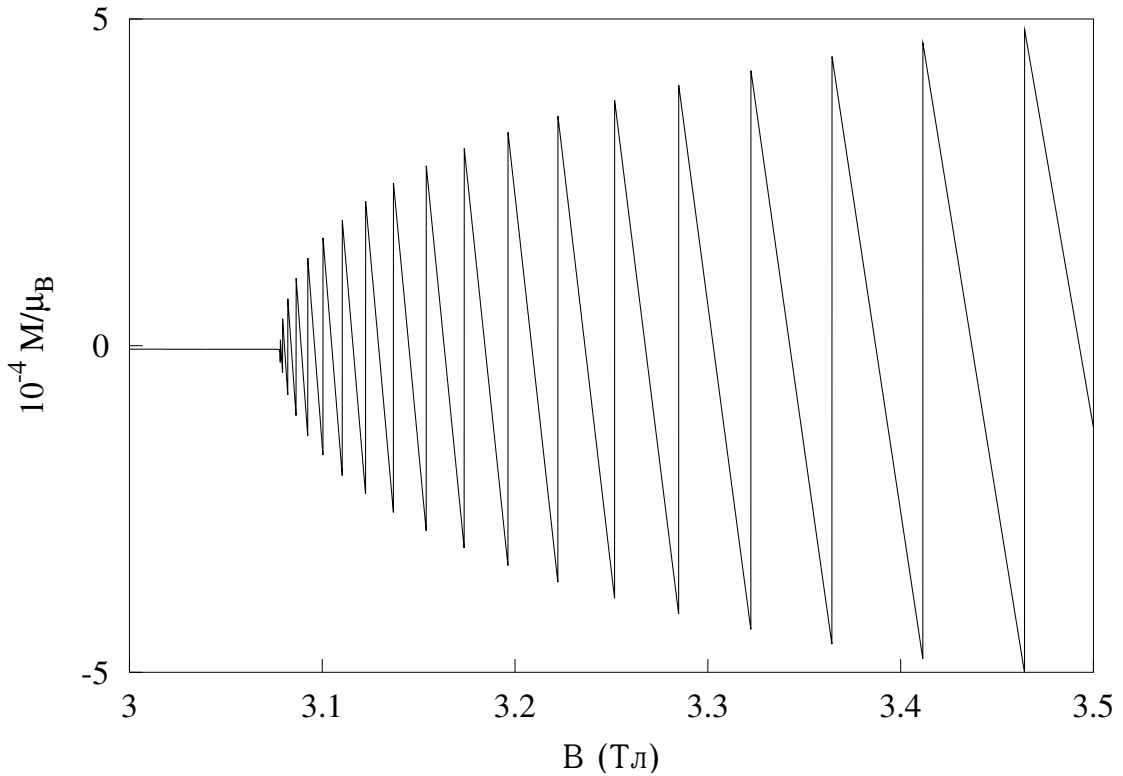


Рис. 4.8. Магнитный момент электронов на поверхности постоянной отрицательной кривизны в зависимости от магнитного поля;  $a = 10^{-5}$  см,  $S = 3 \times 10^{-9}$  см<sup>2</sup>,  $E_F = 2 \times 10^{-13}$  эрг.

малыми. Отбрасывая эти ряды, получим, что в этой области зависимость магнитного момента от поля близка к линейной:

$$\frac{M(T=0)}{\mu_B} \Big|_{\varepsilon_F \gg b^2} \simeq \frac{m_e}{m^*} \frac{S}{2\pi a^2} \left( -\frac{b}{6} \right). \quad (4.15)$$

На Рис. 4.9 сплошной линией показана зависимость  $M(b)$  в случае, когда ниже энергии Ферми лежит как непрерывный, так и дискретный спектр ( $\varepsilon_F \geq b^2$ ). Штриховой линией показана приближенная зависимость магнитного момента от поля (формула (4.15)). Как видно из этого рисунка, формула (4.15) хорошо описывает поведение магнитного момента системы с увеличением магнитного поля практически во всей области, где  $\varepsilon_F > b^2$ .

Как отмечалось в предыдущем разделе, ограничение размеров образца может существенно изменять спектральные свойства системы. Так на выделенной части поверхности постоянной кривизны может пропадать непрерывный спектр, а следовательно, в таких системах не наблюдается область монотонной зависимости магнитного момента от поля. Оценим

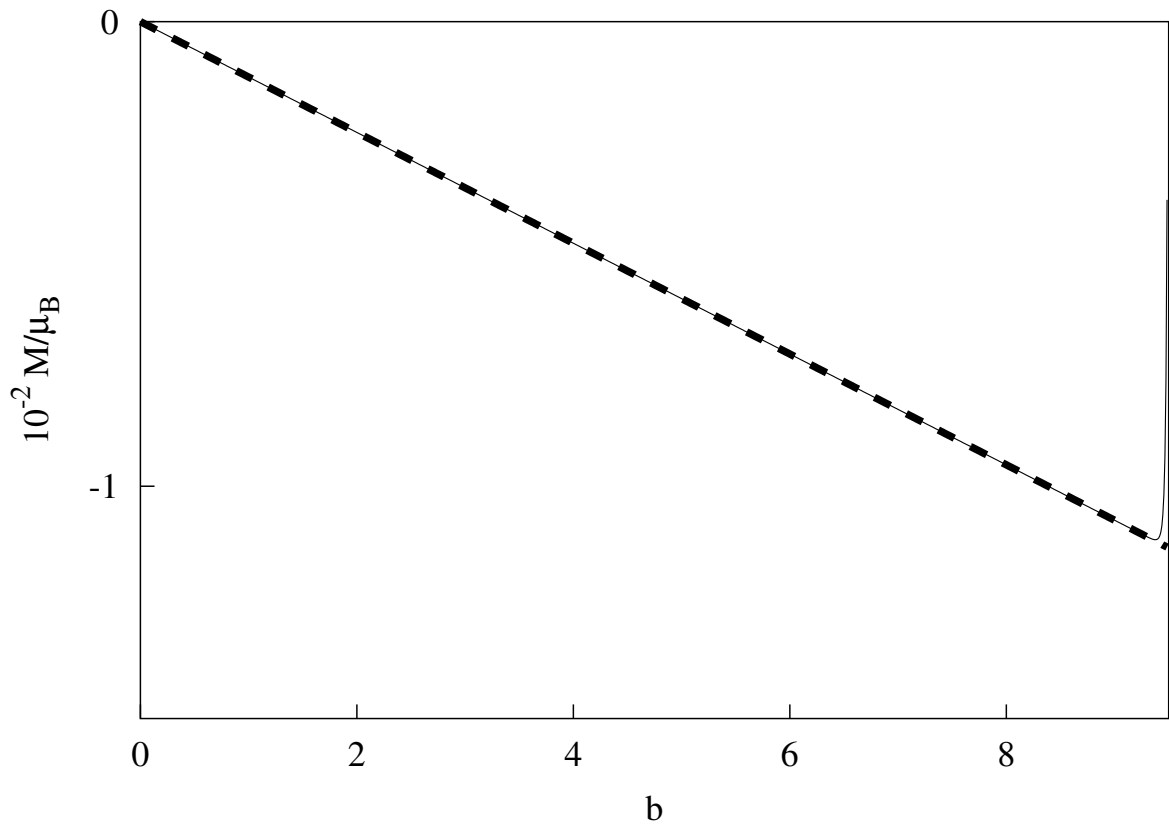


Рис. 4.9. Зависимость  $M(b)$  при  $\varepsilon_F \geq b^2$ ;  $a = 10^{-5}$  см,  $S = 3 \times 10^{-9}$  см<sup>2</sup>,  $E_F = 2 \times 10^{-13}$  эрг.

размеры системы, при которых возможно существование непрерывного спектра электронов. Как следует из (4.2), нижняя граница непрерывного спектра  $E(0) = m^* \omega_c^2 a^2 / 2$ . Электроны с энергией большей  $E(0)$  обладают непрерывным спектром, а электроны с  $E < E(0)$  — дискретным спектром. Сравним энергию границы непрерывного спектра с классической энергией частицы, находящейся на плоскости в перпендикулярном магнитном поле. Энергия такой частицы, движущейся по ларморовой орбите радиуса  $r_L$ , равна  $m^* \omega_c^2 r_L^2 / 2$ . Следовательно, электроны двигающиеся по орбитам с радиусом  $r > a$  обладают непрерывным спектром, а если радиус электронной орбиты  $r < a$ , то спектр такого электрона чисто дискретен. Эти качественные оценки позволяют утверждать, что в образцах площадью  $S > \pi a^2$ , электроны могут обладать непрерывным спектром. Если же площадь поверхности меньше  $\pi a^2$ , то спектр электронов чисто дискретен, поэтому в зависимости магнитного момента системы от магнитного поля нет области монотонной зависимости.

Рассмотрим теперь осцилляции  $M(B)$  в области  $\varepsilon_F < b^2$ . Из (4.14) легко найти вид огибающих максимумов и минимумов магнитного момента:

$$\frac{M^\pm}{\mu_B} = \frac{m_e S}{m^* 2\pi a^2} \sqrt{b^2 - \varepsilon_F} \left( \pm b - \frac{1}{2} \mp \sqrt{b^2 - \varepsilon_F} \right),$$

где  $M^+$  и  $M^-$  — соответственно огибающие максимумов и минимумов магнитного момента на плоскости Лобачевского. Тогда амплитуда осцилляций есть разность между этими величинами:

$$\frac{\Delta M}{\mu_B} = \frac{M^+ - M^-}{\mu_B} = 2 \frac{m_e S}{m^* 2\pi a^2} \sqrt{b^2 - \varepsilon_F} \left( b - \sqrt{b^2 - \varepsilon_F} \right).$$

Из этой формулы видно, что кривизна поверхности приводит к уменьшению амплитуды осцилляций магнитного момента. С увеличением поля амплитуда осцилляций стремится к  $E_F 2m_e S / \pi \hbar^2$ . На Рис. 4.10 представлена зависимость магнитного момента плоскости Лобачевского от поля. Пунктирной и штрих-пунктирной линиями изображены огибающие максимумов и минимумов магнитного момента соответственно.

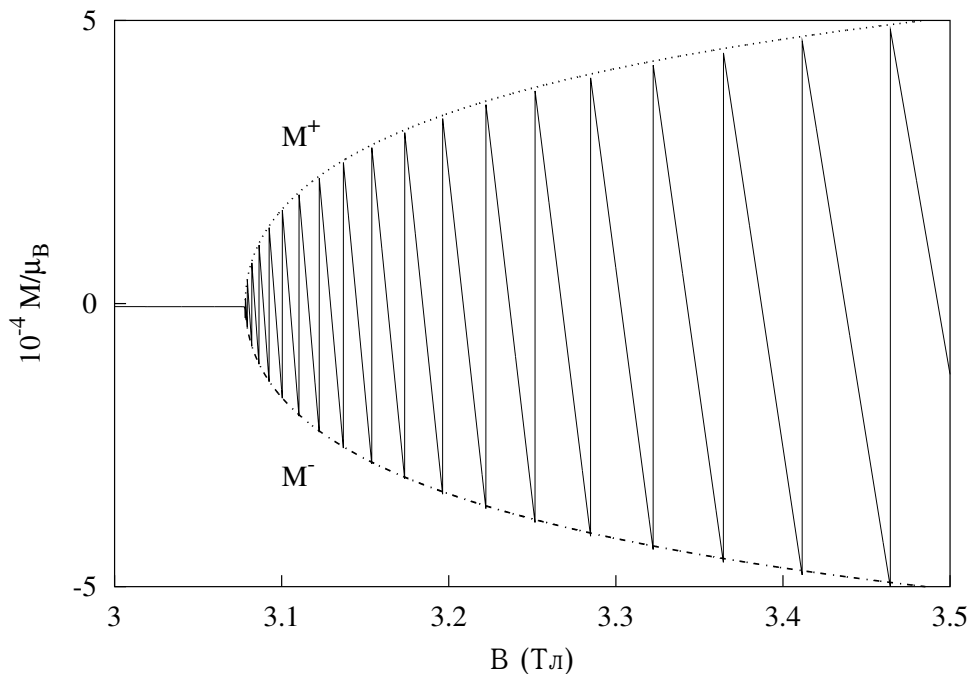


Рис. 4.10. Зависимость магнитного момента двумерного электронного газа на поверхности постоянной отрицательной кривизны от магнитного поля;  $a = 10^{-5}$  см,  $S = 3 \times 10^{-9}$  см<sup>2</sup>,  $E_F = 2 \times 10^{-13}$  эрг.

Исследуем периодичность осцилляций. Как хорошо видно из Рис. 4.8,

осцилляции магнитного момента в зависимости от поля не являются периодическими. Легко найти расстояние между двумя ближайшими скачками в единицах обратно пропорциональных магнитному полю:

$$\Delta \left( \frac{1}{B} \right) = \frac{|e|a^2}{\hbar c} \frac{2\sqrt{b^2 - \varepsilon_F} - 1}{b(b^2 + 2b + 1 - 2(b+1)\sqrt{b^2 - \varepsilon_F})}.$$

Из этого выражения следует, что осцилляции магнитного момента в зависимости от обратного поля не являются периодическими, как в случае плоской поверхности, а сложным образом зависят от магнитного поля, энергии Ферми и радиуса кривизны поверхности. Можно отметить, что при устремлении радиуса кривизны к бесконечности расстояние между двумя соседними максимумами стремится к периоду осцилляций магнитного момента плоской поверхности в зависимости от обратного поля:

$$\Delta \left( \frac{1}{B} \right) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{\hbar|e|}{m^*cE_F}.$$

Рассмотрим теперь влияние кривизны поверхности на поведение магнитного момента. Исходя из анализа полученных формул и численного исследования, можно установить, что при увеличении радиуса кривизны поверхности область монотонной зависимости магнитного момента уменьшается, увеличивается расстояние между скачками в зависимости от магнитного поля, и амплитуда осцилляций увеличивается.

Рассмотрим влияние температуры на магнитный момент двумерного электронного газа на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Подставляя (4.3) в (4.11), получим  $M = M_1 + M_2$ , где

$$\frac{M_1}{\mu_B} = -\frac{m_e}{m^*} \frac{S}{2\pi a^2} \left\{ \sum_{0 \geq n < b-1/2} \left( b - n - \frac{1}{2} \right) (2n + 1) f_0(E_n) - \frac{T 2m^* a^2}{\hbar^2} \sum_{0 \geq n < b-1/2} \ln \{ 1 + \exp[(\mu - E_n)/T] \} \right\}$$

описывает вклад дискретной части спектра, а

$$\frac{M_2}{\mu_B} = -\frac{m_e}{m^*} \frac{S}{2\pi a^2} \left\{ b \int_0^\infty dt \frac{\text{sh } 2\pi\sqrt{t}}{\text{ch } 2\pi\sqrt{t} + \cos 2\pi b} f_0 \left( \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} (t + b^2) \right) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{T2m^*a^2}{\hbar^2}\pi \sin 2\pi b \int_0^\infty dt \frac{\operatorname{sh} 2\pi\sqrt{t}}{(\operatorname{ch} 2\pi\sqrt{t} + \cos 2\pi b)^2} \times \\
& \times \ln \left\{ 1 + \exp \left[ \left( \mu - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2}(t + b^2) \right) / T \right] \right\}
\end{aligned}$$

— непрерывной части спектра в магнитный момент двумерного электронного газа на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Численный анализ этих формул показал, что монотонная часть практически не зависит от температуры, влияние температуры на осцилляции магнитного поля сводятся к сглаживанию осцилляционных экстремумов и уменьшению амплитуды осцилляций.

## Глава 5

# Двумерное квантовое кольцо на поверхности постоянной отрицательной кривизны

### 5.1 Электронный энергетический спектр

Плоскость Лобачевского  $L$  реализована в интерпретации Пуанкаре в круге:  $L = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2a\}$  с метрикой

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{[1 - (r/2a)^2]^2},$$

где  $a$  — радиус кривизны;  $(r, \varphi)$  — полярные координаты на плоскости  $\mathbb{C}$ :  $z = r \exp(i\varphi)$  ( $0 < r < 2a$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ).

Рассмотрим сначала двумерный газ бесспиновых независимых электронов, находящихся на поверхности постоянной отрицательной кривизны (плоскость Лобачевского) в магнитном поле, являющимся суперпозицией ортогонального к плоскости магнитного поля  $B\mathbf{n}$  ( $\mathbf{n}$  — орт нормали плоскости Лобачевского) и поля потока Ааронова — Бома  $\Phi_{AB}$  перпендикулярного к плоскости и проходящего через начало координат. Выберем векторный потенциал ортогонального магнитного поля в калибровке Ландау

$$\mathbf{A}_1 = \left( 0, \frac{Br}{2[1 - (r/2a)^2]} \right),$$

а векторный потенциал потока Ааронова — Бома в виде  $\mathbf{A}_2 = (0, \Phi_{AB}/2\pi r)$ . Тогда в полярных координатах  $(r, \varphi)$  гамильтониан частицы, находящейся

в магнитном поле с векторным потенциалом  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$ , запишется в виде

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \left\{ -a^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{2a} \right)^2 \right]^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right)^2 \right] \right\} - i \frac{\hbar \omega_c}{2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{2a} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} + i \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} \right) + \frac{m^* \omega_c^2 a^2}{2} \left( \frac{r}{2a} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{8m^*a^2}. \quad (5.1)$$

Здесь последнее слагаемое — это так называемый поверхностный потенциал [94], который возникает при учете кривизны поверхности [95].

Рассмотрим двумерное кольцо на поверхности постоянной отрицательной кривизны с потенциалом конфайнмента

$$V(r) = \lambda_1 r^2 + \frac{\lambda_2}{r^2} [1 - (r/2a)^2]^2 - V_0, \quad (5.2)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — параметры потенциала конфайнмента, характеризующие радиус и ширину кольца,  $V_0 = -\lambda_2/2a^2 + 2\sqrt{\lambda_2[\lambda_1 + \lambda_2/(2a)^4]}$ . Эффективный радиус кольца  $r_0$ , определяемый как минимум функции  $V(r)$ , выражается через  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  следующим образом:

$$r_0 = \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2/(2a)^4} \right)^{1/4}.$$

Отметим, что сдвиг в потенциале кольца  $V_0$  выбран таким образом, чтобы  $V(r_0) = 0$ . Легко показать, что при  $r \simeq r_0$  потенциал конфайнмента кольца является параболическим

$$V(r) \simeq \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 (r - r_0)^2,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{8[\lambda_1 + \lambda_2/(2a)^4]/m^*}$  — частота, характеризующая силу поперечного конфайнмента кольца.

Ширину кольца при фиксированной энергии Ферми  $E_F$  можно выразить через параметры потенциала конфайнмента следующим образом:

$$\Delta r = r_+ - r_-, \quad r_{\pm} = \left( \frac{V_0 + E_F \pm \sqrt{2E_F V_0 + E_F^2}}{2\lambda_1 + \lambda_2/8a^4} \right)^{1/2}.$$

Здесь  $r_+$  и  $r_-$  — внешний и внутренний радиусы кольца соответственно.



Отметим, что в пределе нулевой кривизны поверхности потенциал конфайнмента (5.2) имеет вид

$$V(r) \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \lambda_1 r^2 + \frac{\lambda_2}{r^2} - 2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Как показано в [122, 123, 127, 141, 144], этот потенциал хорошо моделирует реальные кольцевые устройства на плоской поверхности.

Для дальнейшего анализа удобно выразить параметры потенциала конфайнмента через радиус кольца  $r_0$  и  $\omega_0$ . Отметим, что рассматриваемая в этой главе модель является довольно гибкой. В частных случаях она может описывать различные физические системы: одномерное кольцо ( $r_0 = \text{const}$ ,  $\omega_0 \rightarrow \infty$ ) и двумерную квантовую точку ( $r_0 = 0$ ).

Уравнение Шредингера для электрона, движение которого ограничено на поверхности постоянной отрицательной кривизны потенциалом кольца (5.2),  $(H_0 + V(r))\psi(r, \varphi) = E\psi(r, \varphi)$  значительно упрощается при подстановке волновой функции в виде  $\psi(r, \varphi) = (\exp(im\varphi)/\sqrt{2\pi})f_m(r)$  и замене переменной  $x = 1/[1 - (r/2a)^2]$ . В результате, уравнение Шредингера можно представить в виде

$$(H_m - 2m^*a^2E/\hbar^2)f_m(x) = 0,$$

где

$$H_m = -\frac{d}{dx}x(x-1)\frac{d}{dx} + \frac{M^2}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{m^{*2}\omega_m^2a^4}{\hbar^2}\frac{1}{x} + \frac{m^{*2}a^4}{\hbar^2} \left\{ \omega_c^2 + \omega_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{2a} \right)^2 \right]^2 \right\} - \frac{1}{4}, \quad (5.3)$$

а величина  $\varphi_{AB} = \Phi_{AB}/\Phi_0$  — число квантов потока Ааронова — Бома,

$$M = \sqrt{(m + \varphi_{AB})^2 + (m^*\omega_0r_0^2/2\hbar)^2}, \quad (5.4)$$

$$\omega_m = \sqrt{[\omega_c - \hbar(m + \varphi_{AB})/2m^*a^2]^2 + \omega_0^2}. \quad (5.5)$$

В Приложении А найден явный вид собственных значений и нормированных собственных функций оператора  $H_m$ . Показано, что спектр оператора  $H_m$  состоит из двух частей: дискретного спектра в интервале  $(0, E_0)$  (формула (A.6)) и непрерывного спектра в интервале  $[E_0, \infty)$

(формула (A.10)), где  $E_0 = m^* \omega_c^2 a^2 / 2 + m^* \omega_0^2 a^2 [1 - (r_0/2a)^2]^2 / 2$  — нижняя граница непрерывного спектра. Так как характерная ширина квантового кольца  $\Delta r < r_0$ , а для квантовой точки  $\Delta r < 2a$ , то можно показать, что для этих наноструктур  $E_F \ll m^* \omega_0^2 a^2 [1 - (r_0/2a)^2]^2 / 2$ . Из (A.10) следует, что в этом случае нижняя граница непрерывного спектра лежит намного выше энергии Ферми для квантового кольца и квантовой точки. Таким образом, при низкой температуре непрерывная часть спектра электронов этих структур не дает никакого вклада в магнитные и транспортные свойства рассматриваемой системы. Поэтому, исходя из (A.6), получим, что спектр электронов в квантовом кольце имеет вид

$$E_{nm} = \hbar \omega_m \left( n + \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \right) + \frac{\hbar \omega_c}{2} (m + \varphi_{AB}) - \frac{m^* \omega_0^2 r_0^2}{4} - \frac{\hbar^2}{2m^* a^2} \left[ \frac{1}{2} (m + \varphi_{AB})^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right) M \right], \quad (5.6)$$

где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Здесь квантовое число  $n$  характеризует радиальное движение электронов в кольце, а  $m$  — орбитальное движение.

Как видно из (5.6), влияние потока Ааронова — Бома на энергетический спектр и волновые функции электрона кольца сводится к сдвигу квантового числа  $m \rightarrow m + \varphi_{AB}$ . Необходимо отметить, что в отличие от одномерного случая, поток Ааронова — Бома изменяет не только фазу волновой функции, но и модуль волновой функции (формула (A.8)), что приводит к изменению траекторий движения электронов и к непараболичности законов дисперсии в зависимости от потока Ааронова — Бома.

На Рис. 5.1 и 5.2 изображен спектр двумерного квантового кольца в зависимости от потока Ааронова — Бома и от величины ортогонального к поверхности магнитного поля соответственно. Как видно из этих рисунков, энергетические уровни с одинаковым квантовым числом  $n$  образуют подзоны. В зависимости от  $\varphi_{AB}$  энергетический спектр системы периодичен с периодом равным кванту потока. В зависимости от  $B$  полная энергия системы не периодична. Таким образом, проникновение

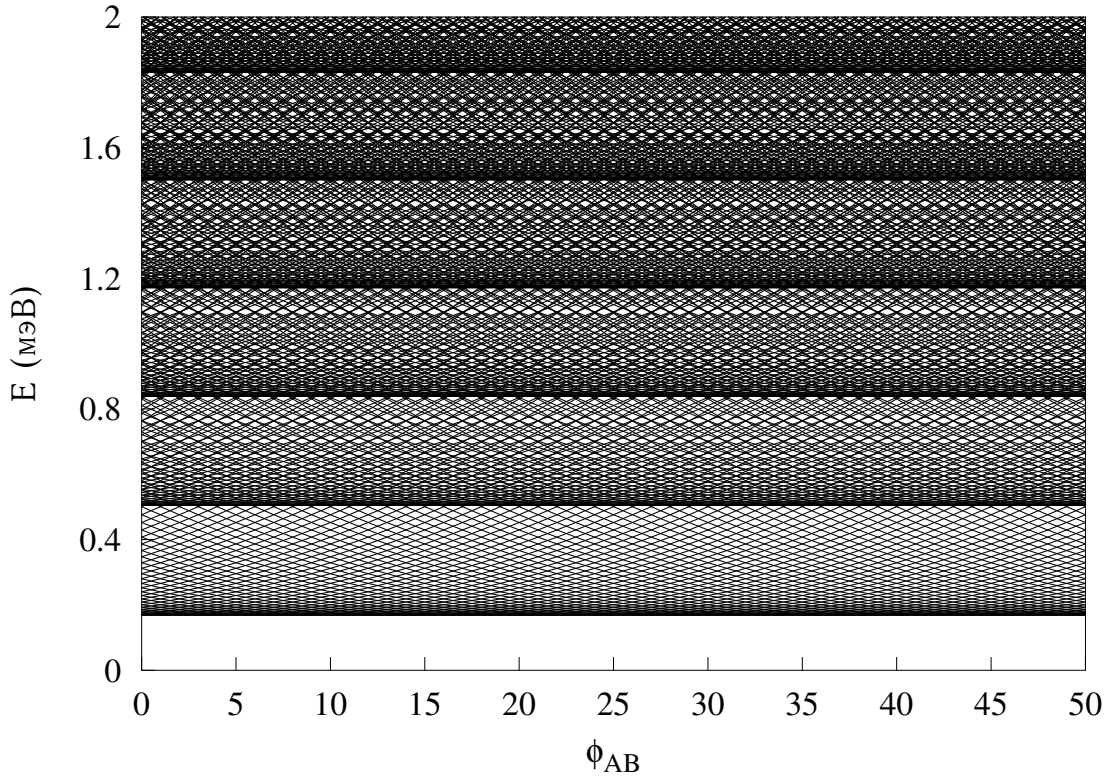


Рис. 5.1. Энергетический спектр электронов в кольце на плоскости Лобачевского в зависимости от потока Ааронова — Бома;  $r_0 = 800$  нм,  $a = 800$  нм,  $\omega_0 = 6.84 \times 10^{11}$  с $^{-1}$ . При таких параметрах ширина кольца при  $E_F = 2$  мэВ равна  $\Delta r = 300$  нм.

магнитного поля в проводящую область кольца приводит к тому, что минимум подзон становится зависящим от магнитного поля, а сама подзона уже не является симметричной [144]. Необходимо отметить, что кривизна поверхности приводит к дополнительной асимметрии подзоны. Далее ограничимся рассмотрением случая  $\varphi_{AB} = 0$ .

Как видно из (5.6), при нулевом магнитном поле минимум всех подзон находится при  $m = 0$ . При ненулевом магнитном поле минимум подзоны находится при  $m = m_0$ , где

$$m_0 = \frac{m^* \omega_c r_0^2}{2\hbar[1 - (r_0/2a)^2]}. \quad (5.7)$$

Отметим, что так же как и в случае плоской поверхности [144],  $m_0$  равно числу квантов потока магнитного поля, проходящего через площадь, ограниченную кольцом радиуса  $r_0$ . Минимум подзоны с номером  $n$  зависит от

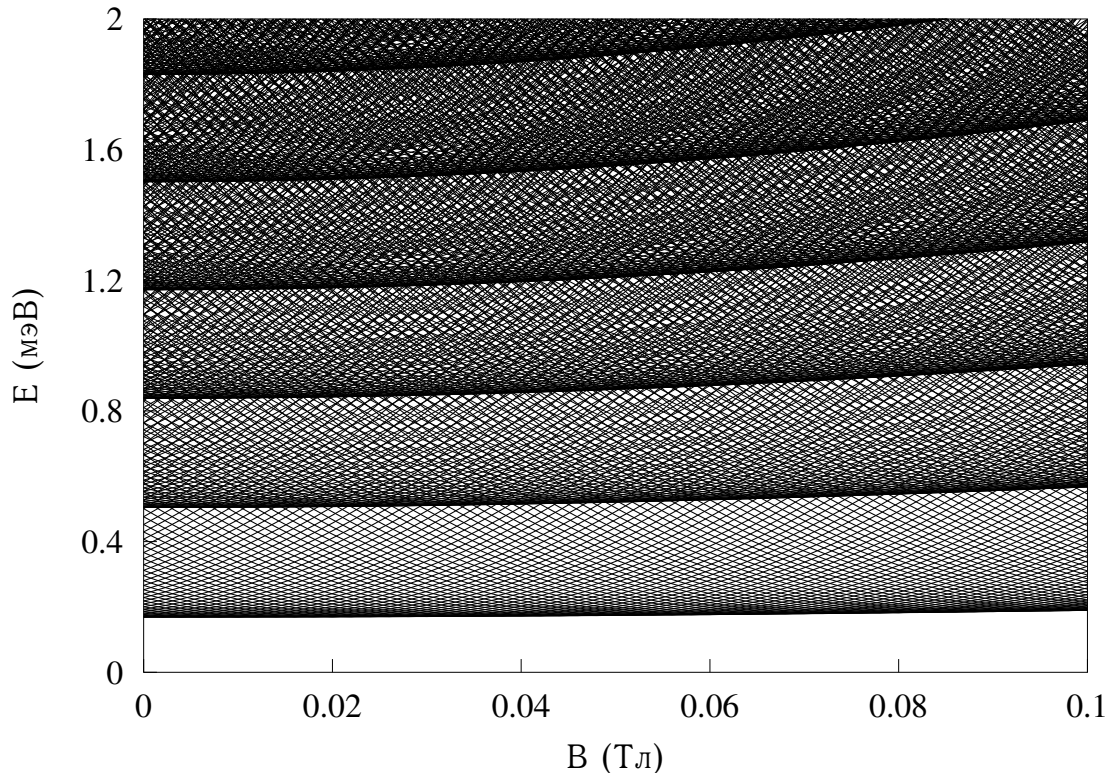


Рис. 5.2. Энергетический спектр электронов в кольце на плоскости Лобачевского в зависимости от величины ортогонального к поверхности магнитного поля. Параметры те же, что и в Рис. 5.1.

магнитного поля по формуле

$$E_{n,m_0} = \hbar\tilde{\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (5.8)$$

где  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2[1 - (r_0/2a)^2]^2}$ . Ясно, что при устремлении кривизны поверхности к нулю формула (5.8) стремится к соответствующей формуле для плоской поверхности:

$$E_{n,m_0} \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (5.9)$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}$ . Необходимо отметить, что для кольца на поверхности постоянной отрицательной кривизны  $r_0 < 2a$ , следовательно, гибридная частота  $\tilde{\omega}$  всегда меньше гибридной частоты  $\omega$  для плоского случая. Увеличение кривизны приводит к уменьшению вклада в  $\tilde{\omega}$  слагаемого, определяющего ширину кольца. Поэтому можно сделать вывод, что одним из проявлений кривизны поверхности является уменьшение поперечного

конфайнмента кольца. Из (5.9) следует, что расстояние между минимумами соседних подзон для плоской поверхности равно  $\hbar\omega$ . Исходя из (5.8), можно показать, что расстояние между минимумами соседних подзон для поверхности постоянной отрицательной кривизны всегда меньше чем для плоской поверхности и зависит от номера подзоны. Как видно из Рис. 5.2 и из (5.8), при увеличении магнитного поля минимум подзоны возрастает, причем зависимость минимума подзоны от магнитного поля сильнее для высших подзон. Уменьшение ширины кольца приводит к смещению подзон в область бóльших энергий, к увеличению расстояния между подзонами и к ослаблению зависимости минимума подзон от магнитного поля. Сравнивая (5.8) и (5.9), получим, что кривизна приводит к обратным эффектам: увеличение кривизны поверхности приводит к сдвигу всех подзон вниз по оси энергии и к усилению зависимости минимума подзон от  $B$  (сравни Рис. 5.2 и Рис. 4 в [144]).

Рассмотрим предельные случаи модели.

Одномерное кольцо ( $r_0 = \text{const}$ ,  $\omega_0 \rightarrow \infty$ ). Действуя аналогично [144], можно показать, что при  $\omega_0 \rightarrow \infty$

$$E_{n,m} = \hbar\tilde{\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m^*r_0^2} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{2a} \right)^2 \right]^2 (m - m_0)^2, \quad (5.10)$$

где  $m_0$  определяется уравнением (5.7). Из (5.10) следует, что электронами заполнена только нижняя подзона. Минимум подзоны не зависит от магнитного поля и симметричен относительно  $m_0$ . На Рис. 5.3 показан электронный спектр в одномерном квантовом кольце. Если сравнить эту формулу с соответствующей для плоской поверхности, можно показать, что кривизна поверхности приводит к смещению минимума подзоны в область меньшего значения магнитного поля и к ослаблению зависимости энергии электронного уровня от магнитного поля.

Квантовая точка ( $r_0 = 0$ ). Полагая  $r_0 = 0$  в (5.6), получим энергетический спектр электронов в квантовой точке на поверхности постоянной

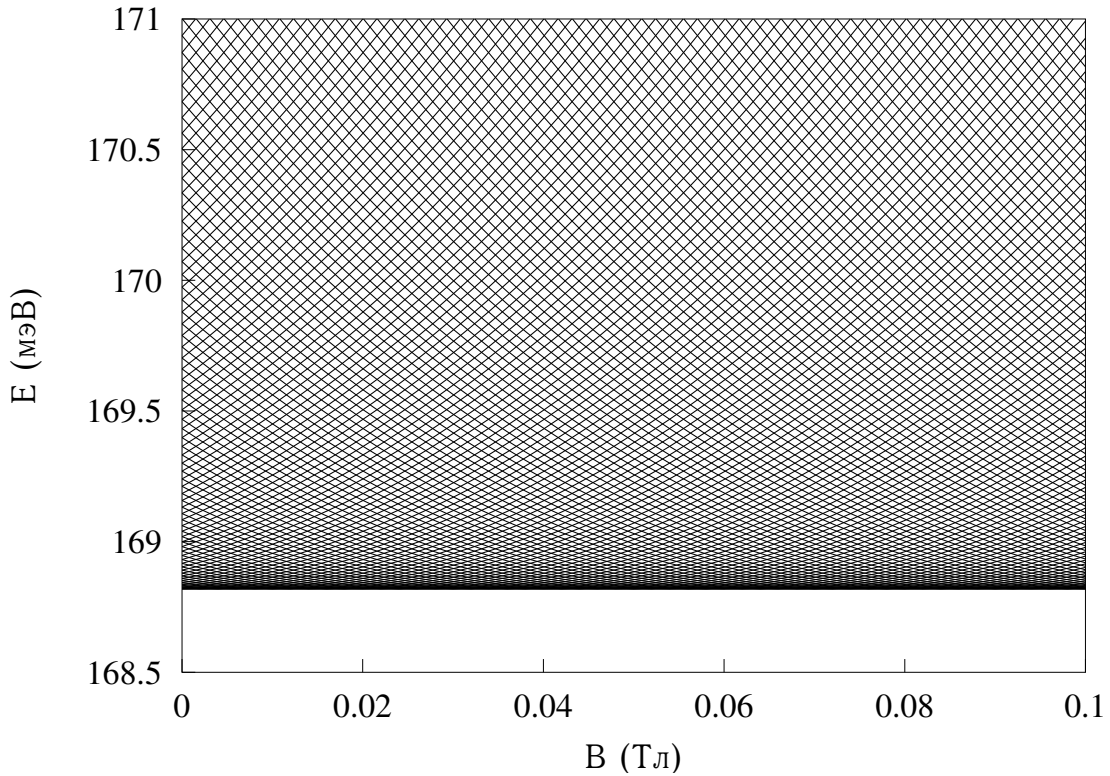


Рис. 5.3. Энергетический спектр электронов в одномерном кольце на плоскости Лобачевского в зависимости от магнитного поля;  $r_0 = 800$  нм,  $a = 800$  нм.

отрицательной кривизны

$$E_{n,m} = \hbar\omega_m \left( n + \frac{1}{2} + \frac{|m|}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_c m}{2} - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \left[ \frac{m^2}{2} + \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right) |m| \right]. \quad (5.11)$$

Как хорошо известно [103, 127], энергетический спектр изотропной двумерной квантовой точки на плоской поверхности вырожден при нулевом магнитном поле (уровень с номером  $n$  является  $n$ -кратно вырожденным). Слабое магнитное поле снимает вырождение уровней, а в пределе сильных магнитных полей электронные уровни формируют подзоны Ландау с гибридной частотой. Из (5.11) следует, что кривизна приводит к смещению всех уровней в область меньших энергий, причем смещение существенней для уровней с большими  $n$  или  $m$ , и, как видно из Рис. 5.4, к частичному снятию вырождения уровней при нулевом магнитном поле. Энергетические уровни электронов в квантовой точке на поверхности постоянной отрицательной кривизны при нулевом магнитном поле вырождены по  $|m|$ .

Из (5.11), следует, что гибридная частота  $\omega_m$  зависит от квантового числа  $m$ , следовательно, для уровней с малым  $|m|$  кривизна практически не влияет на поведение уровней в зависимости от магнитного поля, для уровней с большим  $|m|$ , напротив, кривизна приводит к существенному изменению гибридной частоты и к изменению поведения уровней в зависимости от магнитного поля.

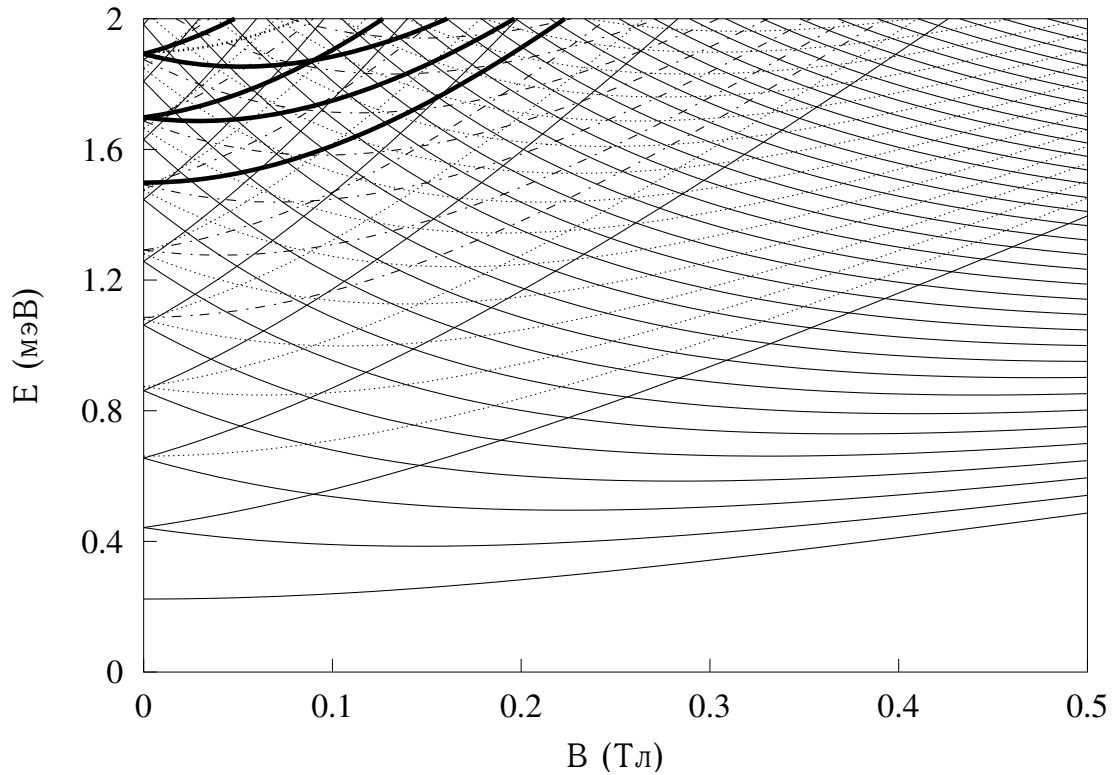


Рис. 5.4. Спектр электронов в квантовой точке на плоскости Лобачевского в зависимости от магнитного поля;  $a = 300$  нм,  $\omega_0 = 6.84 \times 10^{11}$  с $^{-1}$ . Уровни с различным квантовым числом  $n$  изображены различным стилем.

В заключении этого раздела отметим, что зависимость энергетического спектра от потока Ааронова — Бома периодична с периодом равным кванту потока. В отличие от одномерного случая, ненулевая ширина кольца и кривизна поверхности приводят к непараболичности законов дисперсии от потока Ааронова — Бома. Энергетический спектр двумерного квантового кольца не является периодической функцией ортогонального к поверхности магнитного поля. Это объясняется эффектом проникновения магнитного поля в проводящую область кольца. Кроме того, эффект

проникновения приводит к тому, что минимум подзон становится зависящим от магнитного поля, а сама подзона уже не является симметричной. Кривизна поверхности приводит к дополнительной асимметрии подзоны, к сдвигу подзон вниз по оси энергии (сдвиг больше для уровней с большим квантовым числом  $n$  или  $|m|$ ) и к уменьшению расстояния между минимумами подзон по сравнению с плоским случаем.

В пределе одномерного кольца кривизна поверхности приводит к ослаблению зависимости энергии электронного уровня от магнитного поля.

В пределе квантовой точки кривизна приводит к частичному снятию вырождения уровней при нулевом магнитном поле. Из (5.11), следует, что гибридная частота  $\omega_m$  зависит от квантового числа  $m$ . Таким образом, для уровней с малыми  $|m|$  кривизна практически не влияет на поведение уровней в зависимости от магнитного поля, для уровней с большим  $|m|$ , напротив, кривизна приводит к существенному изменению гибридной частоты и к изменению поведения уровней в зависимости от магнитного поля.

## 5.2 Магнитный отклик и незатухающие токи

Для изолированного двумерного квантового кольца на поверхности постоянной отрицательной кривизны магнитный момент вычисляется по формуле

$$\mathcal{M} = - \left( \frac{\partial F}{\partial B} \right)_{T,N} = \sum_{n,m} \mathcal{M}_{n,m} f_0(E_{n,m}), \quad (5.12)$$

где  $F$  — свободная энергия,  $N$  — число электронов в системе, вклад состояния  $(n, m)$  в магнитный момент кольца

$$\mathcal{M}_{n,m} = - \frac{\partial E_{n,m}}{\partial B}. \quad (5.13)$$

Химический потенциал системы определяется из условия нормировки

$$N = \sum_{n,m} f_0(E_{n,m}).$$



Подставляя (5.6) в (5.13), получим для двумерного кольца на поверхности постоянной отрицательной кривизны

$$\frac{\mathcal{M}_{n,m}}{\mu_B} = -\frac{m_e}{m^*} \left[ m + \varphi_{AB} + \frac{\omega_c - \hbar(m + \varphi_{AB})/2m^*a^2}{\omega_m} (2n + 1 + M) \right], \quad (5.14)$$

где  $M$  и  $\omega_m$  определяются соответственно уравнениями (5.4) и (5.5).

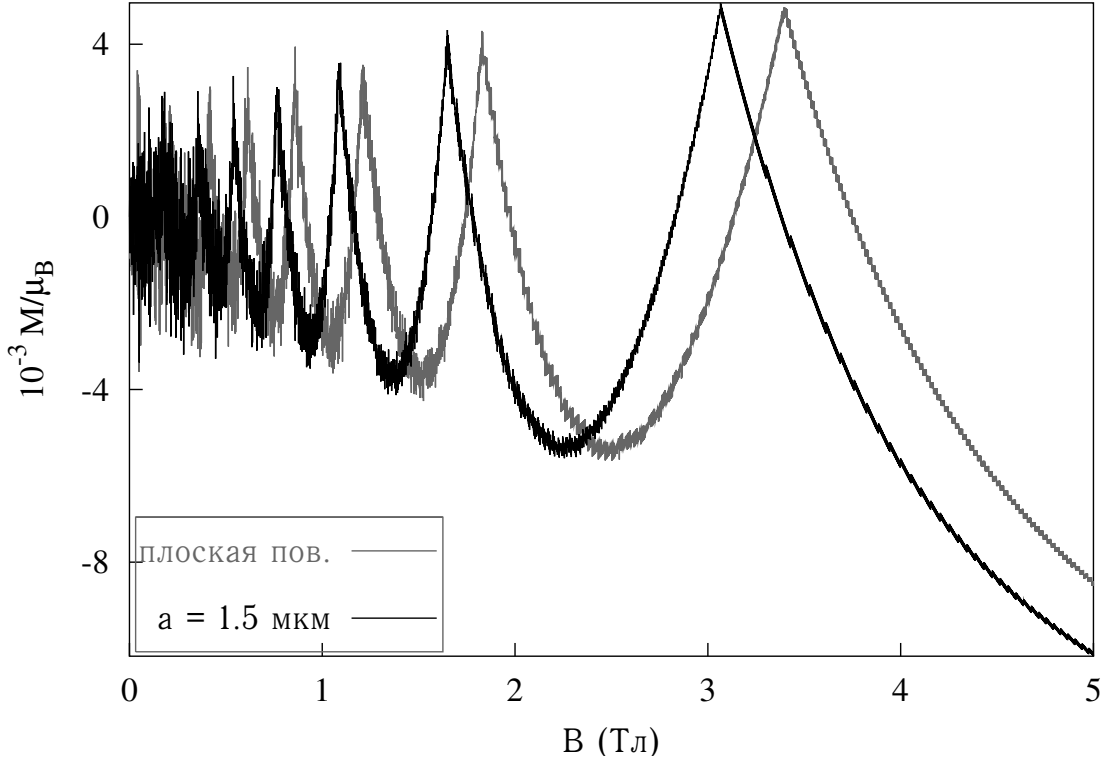


Рис. 5.5. Магнитный момент двумерного квантового кольца в зависимости от магнитного поля;  $N = 1000$ ,  $r_0 = 800$  нм,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12}$  с $^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ ,  $T = 0$  К.

На Рис. 5.5 представлена зависимость  $\mathcal{M}(B)$  двумерного квантового кольца на поверхности постоянной отрицательной кривизны и на плоской поверхности при нулевой температуре. Как видно из этого рисунка магнитный момент двумерного квантового кольца на поверхности постоянной отрицательной кривизны (также как и на плоской поверхности [122, 127]) имеет сложный осцилляционный характер: осцилляции типа Ааронова — Бома (АБ) накладываются на осцилляции типа де Гааза — ван Альфена (дГВА). Амплитуда осцилляций типа АБ уменьшается, а амплитуда осцилляций типа дГВА увеличивается с увеличением магнитного поля. В пределе слабых магнитных полей амплитуды двух типов

имеют одинаковые порядки, и наложение этих двух типов осцилляций приводит к сложной зависимости  $\mathcal{M}(B)$  типа биений (Рис. 5.6). В пределе больших магнитных полей амплитуда осцилляций типа АБ намного меньше амплитуды осцилляций типа дГВА (Рис. 5.5), причем осцилляции типа АБ в этом пределе периодичны по магнитному полю (Рис. 5.7).

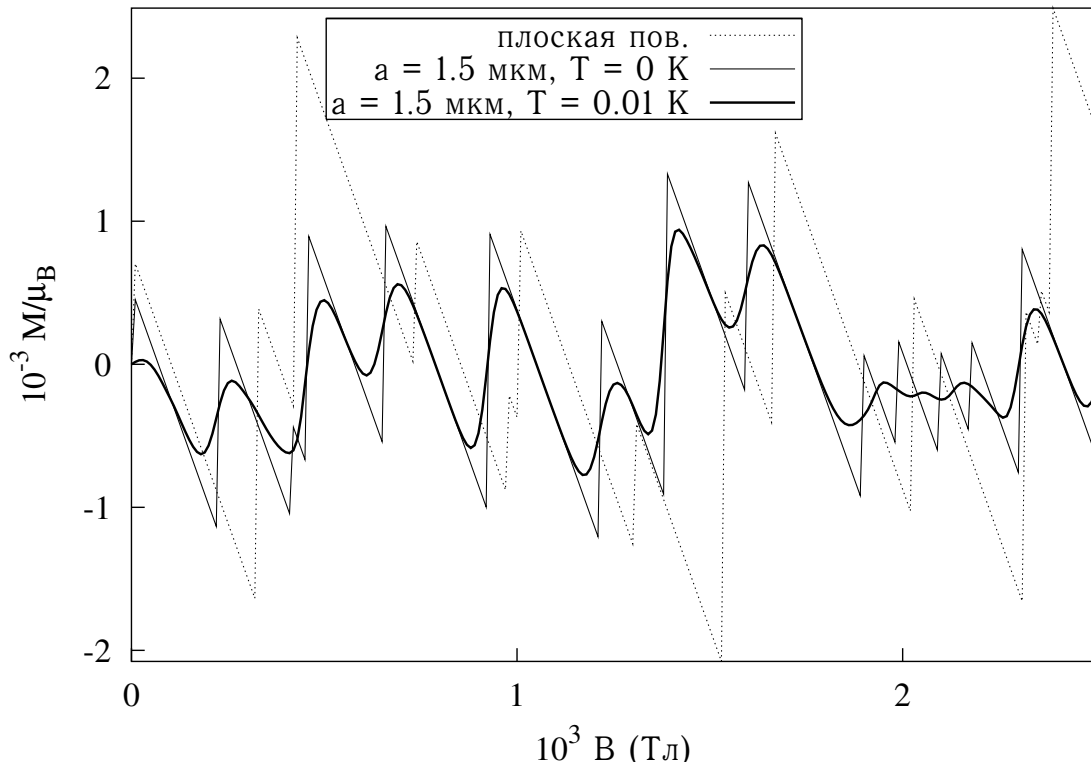


Рис. 5.6. Магнитный момент двумерного квантового кольца в зависимости от магнитного поля. Случай слабого магнитного поля;  $N = 1000$ ,  $r_0 = 800$  нм,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12}$  с $^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ .

Необходимо отметить, что осцилляции магнитного момента типа АБ возникают в результате пересечений энергетических уровней электронов системы. Осцилляции типа дГВА возникают из-за особенностей в плотности распределения электронных уровней. Как видно из Рис. 5.2, плотность электронных уровней больше вблизи минимумов подзон. Поэтому при пересечении химическим потенциалом минимумов подзон возникают максимумы осцилляций типа дГВА.

Исследуем влияние кривизны на магнитный момент кольца. Как отмечалось в предыдущем разделе, одним из проявлений кривизны по-

верхности является уменьшение расстояния между минимумами подзон. Это приводит к уменьшению расстояния между максимумами осцилляций типа дГВА (см Рис. 5.5). Кроме того, в пределе слабых магнитных полей число подзон ниже энергии Ферми больше для поверхности постоянной отрицательной кривизны. Таким образом, в этом случае увеличивается число осцилляций и уменьшается максимальная амплитуда осцилляций при увеличении кривизны поверхности (Рис. 5.6).

Другим проявлением кривизны поверхности является зависимость гибридной частоты от магнитного квантового числа (формула (5.5)). Как следует из этой формулы, кривизна поверхности приводит к ослаблению зависимости энергетических уровней от магнитного поля и к уменьшению расстояния между соседними уровнями. Первое обстоятельство приводит к уменьшению амплитуды осцилляций типа АБ, второе — к уменьшению периода этих осцилляций (Рис. 5.7). Как видно из Рис. 5.7, монотонная

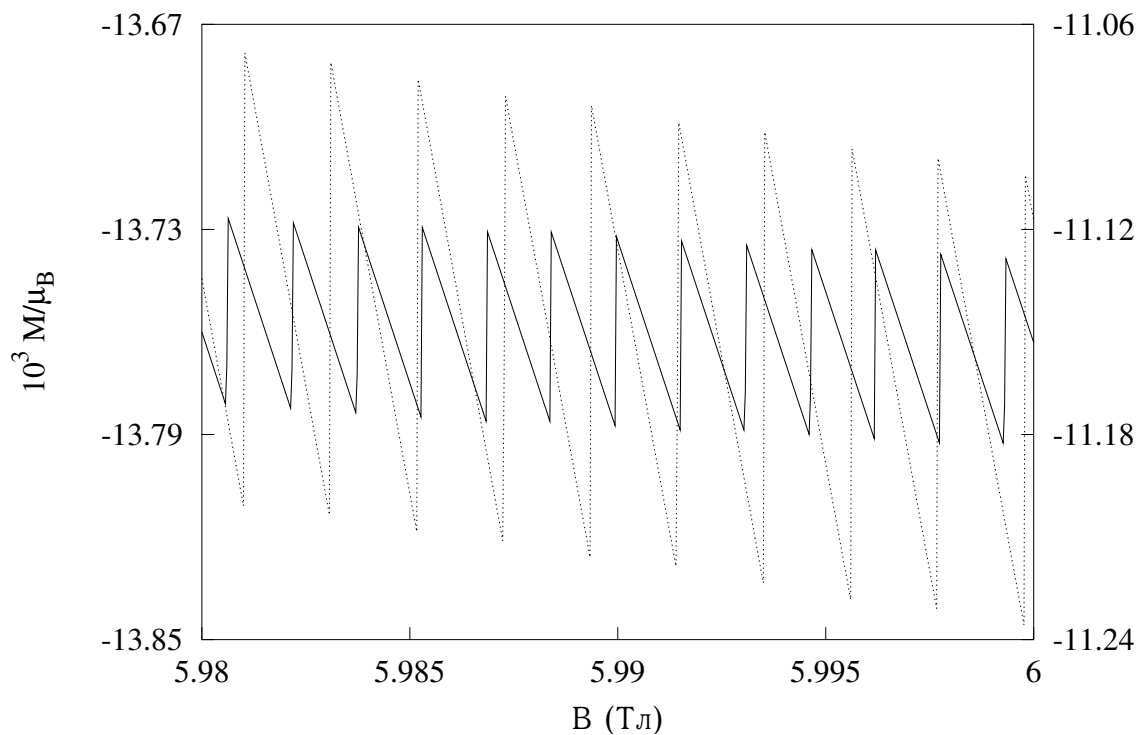


Рис. 5.7. Магнитный момент двумерного квантового кольца в зависимости от магнитного поля. Случай сильных магнитных полей. По правой оси отложен магнитный момент кольца на поверхности постоянной отрицательной кривизны  $a = 800$  нм (сплошная линия). По левой оси отложен магнитный момент кольца на плоской поверхности (пунктирная линия);  $N = 1000$ ,  $r_0 = 800$  нм,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12}$  с $^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ ,  $T = 0$  К.

часть магнитного момента кольца на поверхности постоянной отрицательной кривизны находится ниже чем для плоского случая.

Влияние температуры сводится к размытию осцилляционных максимумом магнитного момента и уменьшению амплитуды осцилляций (Рис. 5.6).

Рассмотрим различные предельные случаи модели.

В пределе одномерного квантового кольца, подставляя (5.10) в (5.13), получим для магнитного момента

$$\frac{\mathcal{M}_{n,m}}{\mu_B} = \frac{m_e}{m^*} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{2a} \right)^2 \right] \left( m + \frac{\Phi_{AB}}{\Phi_0} - \frac{\Phi}{\Phi_0} \right), \quad (5.15)$$

где  $\Phi = BS$  — магнитный поток, проходящий через кольцо,  $S = \pi r_0^2 / [1 - (r_0/2a)^2]$  — площадь на поверхности постоянной отрицательной кривизны, ограниченная кольцом. Как видно из (5.15), магнитный момент одномерного квантового кольца как функция магнитного потока проходящего через кольцо, испытывает периодические осцилляции с периодом равным кванту потока. Другим проявлением кривизны является уменьшение амплитуды осцилляций магнитного момента. Как следует из анализа спектра одномерного кольца, кривизна поверхности приводит также к сдвигу осцилляций в область меньших магнитных полей по сравнению с плоским случаем.

В пределе квантовой точки, полагая  $r_0 = 0$  в (5.14), получим

$$\frac{\mathcal{M}_{n,m}}{\mu_B} = -\frac{m_e}{m^*} \left[ m + \varphi_{AB} + \frac{\omega_c - \hbar(m + \varphi_{AB})/2m^*a^2}{\omega_m} (2n + 1 + |m + \varphi_{AB}|) \right]. \quad (5.16)$$

Как отмечалось в предыдущем разделе, при нулевом магнитном поле уровни изотропной квантовой точки сильно вырождены. Слабое магнитное поле снимает это вырождение, и вблизи уровня Ферми больше электронов занимают состояния с  $m < 0$ , которые имеют меньшее значение энергии по сравнению с состояниями с  $m \geq 0$ . Таким образом, в пределе очень слабых магнитных полей квантовая точка на плоской поверхности обладает достаточно большим магнитным моментом [127]. Дальнейшее увеличение магнитного поля приводит к сложной осцилляционной зависимости  $\mathcal{M}(B)$ , являющейся наложением осцилляций типа

АБ на осцилляции типа дГВА. На Рис. 5.8 изображена зависимость  $\mathcal{M}(B)$

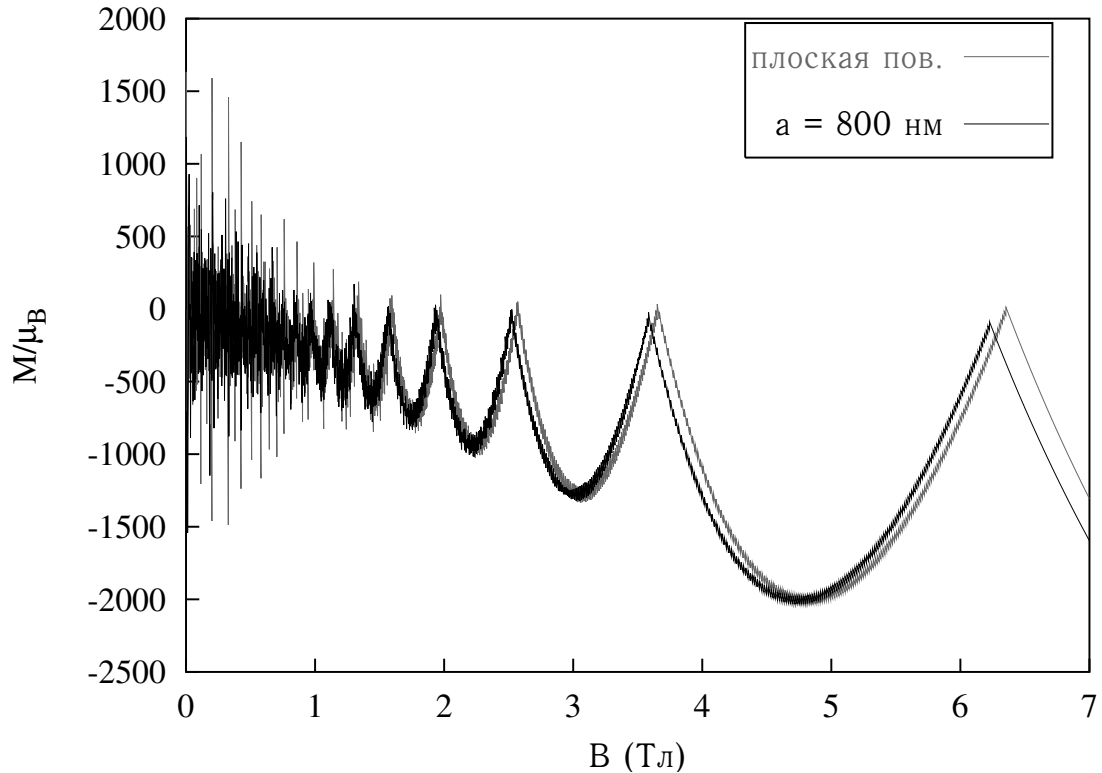


Рис. 5.8. Магнитный момент квантовой точки в зависимости от магнитного поля;  $N = 500$ ,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ ,  $T = 0 \text{ К}$ .

как для плоской поверхности, так и для поверхности постоянной отрицательной кривизны. Как следует из вида спектра электронов, кривизна поверхности приводит к уменьшению периода и амплитуды осцилляций типа дГВА (Рис. 5.8). Так как кривизна поверхности снимает вырождение уровней при нулевом магнитном поле, то в области слабых магнитных полей магнитный момент квантовой точки на поверхности постоянной отрицательной кривизны меньше по сравнению с плоским случаем. При увеличении магнитного поля возникают новые скачки магнитного момента, обусловленные пересечениями вырожденных при  $B = 0$  уровней в плоском случае (Рис. 5.9).

В пределе сильных полей, когда заполнена только нижняя подзона, нет пересечений уровней и поэтому мелкие осцилляции типа АБ пропадают (Рис. 5.10).

Рассмотрим незатухающие токи, возникающие в двумерном кван-

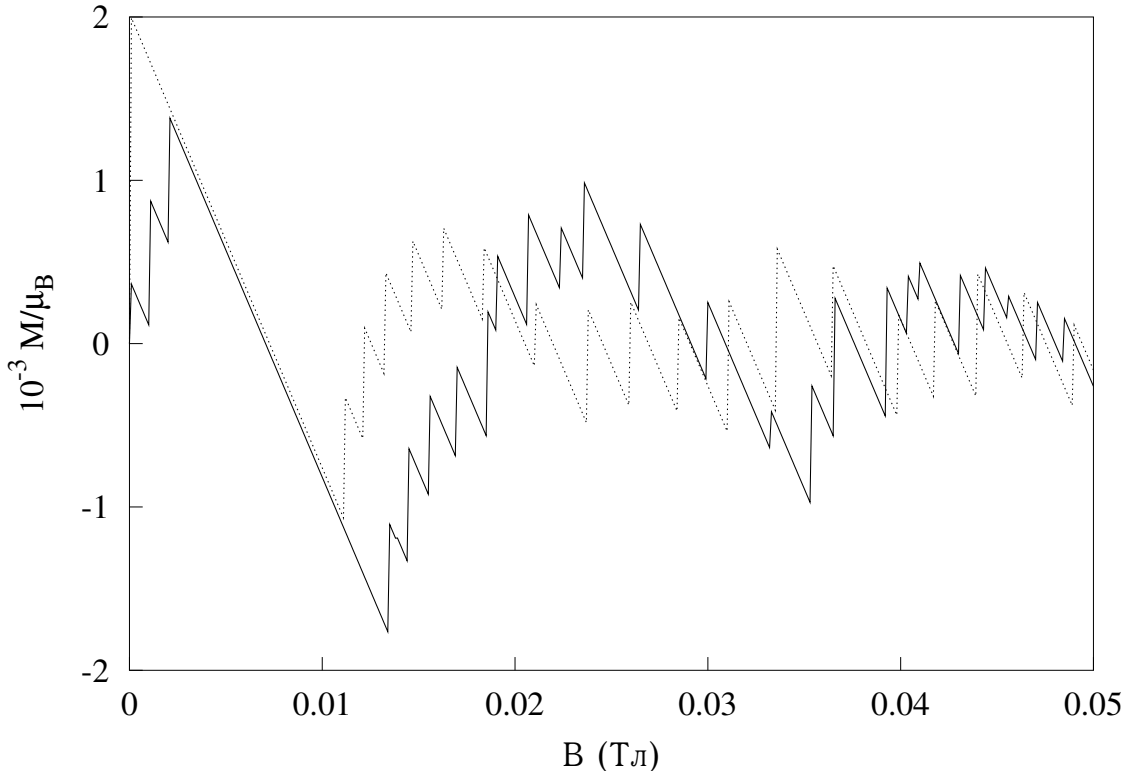


Рис. 5.9. Магнитный момент квантовой точки в зависимости от магнитного поля (слабое магнитное поле). Сплошной линией изображен магнитный момент квантовой точки на поверхности постоянной отрицательной кривизны  $a = 800$  нм. Пунктирной линия соответствует магнитному моменту квантовой точки на плоской поверхности;  $N = 500$ ,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ ,  $T = 0 \text{ К}$ .

товом кольце на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Найдем связь незатухающего тока с магнитным моментом системы и проанализируем влияние кривизны на незатухающие токи в кольце. В случае, когда волновая функция системы обращается в нуль при  $r = 0$ , для вычисления незатухающего тока в кольце можно воспользоваться формулой [26, 155]

$$I = -c \left( \frac{\partial F}{\partial \Phi_{AB}} \right)_{T,N} = \sum_{n,m} I_{n,m} f_0(E_{n,m}), \quad (5.17)$$

где

$$I_{n,m} = -c \frac{\partial E_{n,m}}{\partial \Phi_{AB}}. \quad (5.18)$$

С учетом (5.14), вклад состояния  $(n, m)$  в незатухающий ток в кольце можно представить в виде

$$I_{n,m} = \frac{c}{\pi r_m^2} \left\{ \mathcal{M}_{n,m} \left[ 1 - \left( \frac{r_m}{2a} \right)^2 \right] + \frac{m_e}{m^*} \mu_B \frac{\omega_c}{\omega_m} (2n + 1) \right\}, \quad (5.19)$$

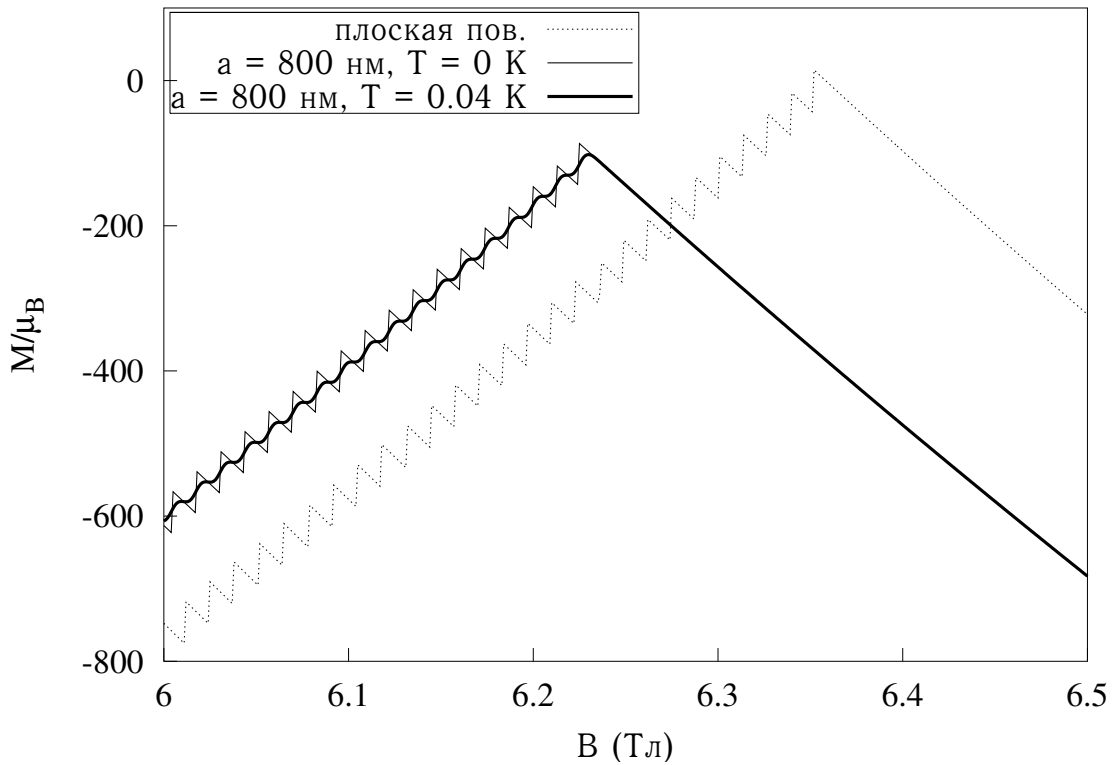


Рис. 5.10. Магнитный момент квантовой точки в зависимости от магнитного поля (сильное магнитное поле);  $N = 500$ ,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ .

где  $r_m = \sqrt{2\hbar M/m^* \omega_m}$  — эффективный радиус состояния с магнитным квантовым числом  $m$  [127, 144]. Первое слагаемое в (5.19) есть аналог классического тока в кольце радиуса  $r_m$  в магнитном поле, второе слагаемое, обусловленное проникновением магнитного поля в проводящую область кольца, нарушает линейную зависимость магнитного момента и незатухающего тока. Как видно из (5.19), только в области слабых полей ( $\omega_c \ll \omega_0$ ) вклад состояния в незатухающий ток пропорционален вкладу этого состояния в магнитный момент системы. На Рис. 5.11 представлена зависимость незатухающего тока от магнитного поля. Как видно из этого рисунка, незатухающий ток кольца является осциллирующей функцией магнитного поля. Амплитуда осцилляций существенно уменьшается с увеличением магнитного поля. Это обусловлено тем, что амплитуда осцилляций  $\sim \sqrt{P}$ , где  $P$  — число заполненных электронами подзон [127]. С увеличением магнитного поля это число уменьшается, что приводит к уменьшению амплитуды осцилляций. В пределе слабых магнитных по-

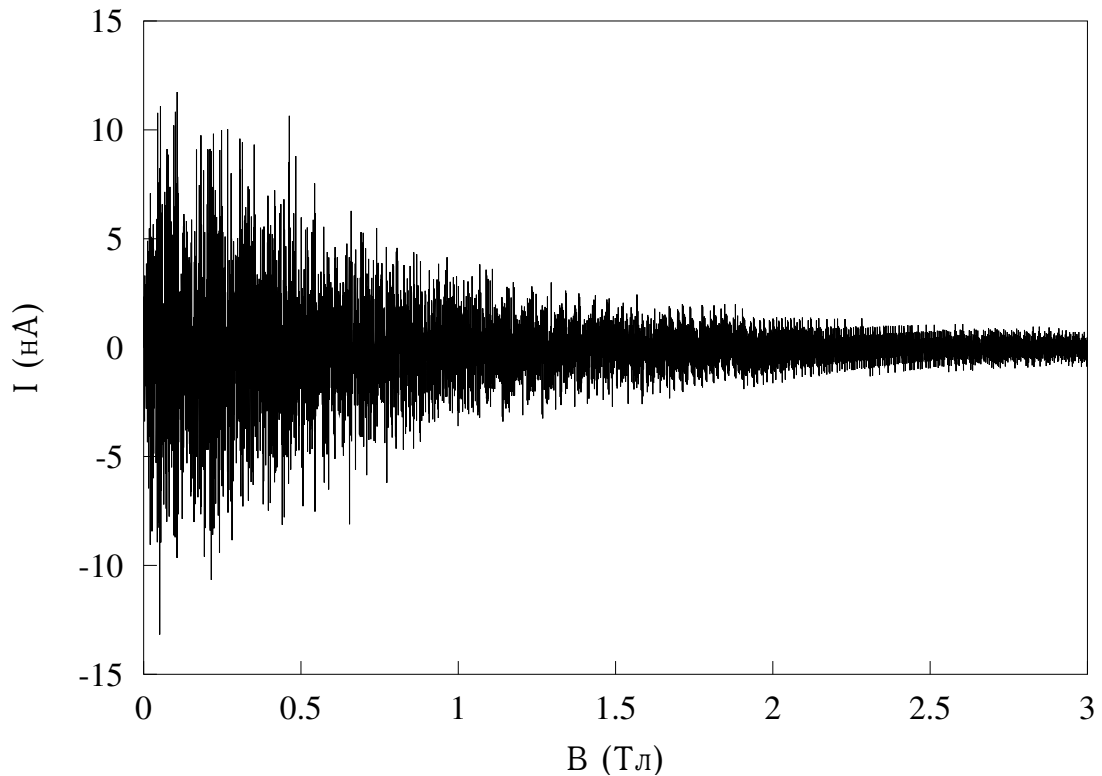


Рис. 5.11. Незатухающий ток в двумерном квантовом кольце на плоскости Лобачевского в зависимости от магнитного поля;  $N = 1000$ ,  $a = 1.5$  мкм,  $r_0 = 800$  нм,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12}$  с $^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ ,  $T = 0$  К.

лей несколько подзон являются заполненными электронами. Пересечение верхнего занятого энергетического уровня с уровнями этих подзон приводит к зависимости  $I(B)$  типа биений, причем, как отмечалось выше, в этой области магнитных полей незатухающий ток пропорционален магнитному моменту системы, поэтому в этом пределе поведение незатухающего тока аналогично поведению магнитного момента (Рис. 5.6). В пределе сильных магнитных полей заполненной является только нижняя подзона и только пересечения уровней этой подзоны с верхним занятым уровнем приводят к осцилляциям незатухающего тока в кольце. Так как расстояние между пересечениями уровней нижней подзоны слабо зависит от магнитного поля, то в этом пределе осцилляции незатухающего тока (так же как и магнитного момента) являются почти периодическими (Рис. 5.12). Период этих осцилляций такой же как и для магнитного момента (Рис. 5.7). Как отмечалось выше кривизна приводит к уменьшению периода и амплитуды



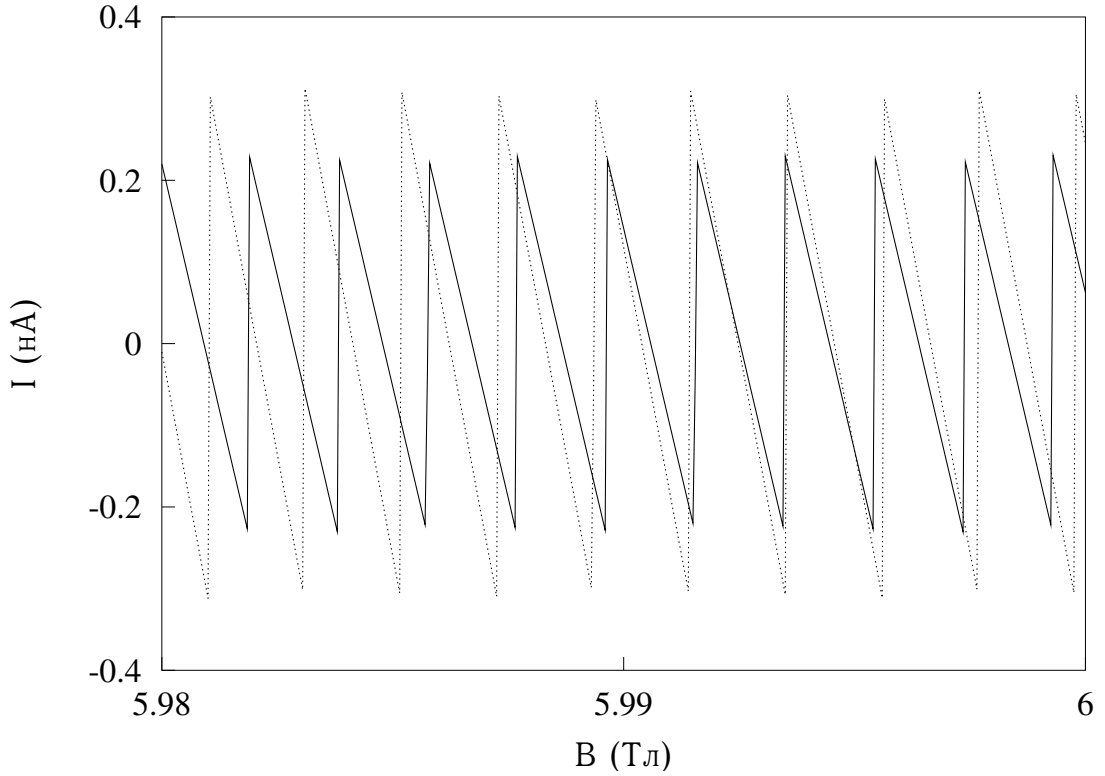


Рис. 5.12. Незатухающий ток в двумерном квантовом кольце в зависимости от магнитного поля (сильное магнитное поле). Сплошной линией изображен магнитный момент кольца на поверхности постоянной отрицательной кривизны  $a = 1.5$  мкм. Пунктирной линией изображен магнитный момент кольца на плоской поверхности;  $N = 1000$ ,  $r_0 = 800$  нм,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12}$  с $^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ ,  $T = 0$  К.

осцилляций магнитного момента. Как следует из (5.19), для незатухающего тока кривизна приводит к дополнительному уменьшению амплитуды осцилляций по сравнению с магнитным моментом.

Заметим, что формула (5.18) справедлива также и для квантовой точки (кроме случая, когда  $m + \varphi_{AB} = 0$ ). Действительно, при  $r_0 = 0$  волновая функция электрона с  $m + \varphi_{AB} = 0$  имеет ненулевое значение в центре кольца, а в этом случае формула (5.17) уже не применима. Тем не менее, поскольку (5.18) применяется для любых состояний при  $r_0 \neq 0$ , вклад состояний с  $m + \varphi_{AB} = 0$  в незатухающий ток квантовой точки может быть вычислен аналогично [127]

$$I_{n,-\varphi_{AB}} = \lim_{r_0 \rightarrow 0} \left[ \lim_{m \rightarrow -\varphi_{AB}} I_{n,m} \right] = -\frac{|e|\omega_c}{4\pi} + \frac{|e|\hbar}{4\pi m^* a^2} \frac{\omega_c}{\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_0^2}$ .

Отметим, что с увеличением магнитного поля эффект проникновения магнитного поля в проводящую область кольца становится существенным, что приводит к нарушению пропорциональности между магнитным моментом и незатухающим током в квантовой точке. Незатухающий ток в зависимости от магнитного поля испытывает резкие скачки при пересечении уровнем Ферми нижней границы подзоны (Рис. 5.13). На эти

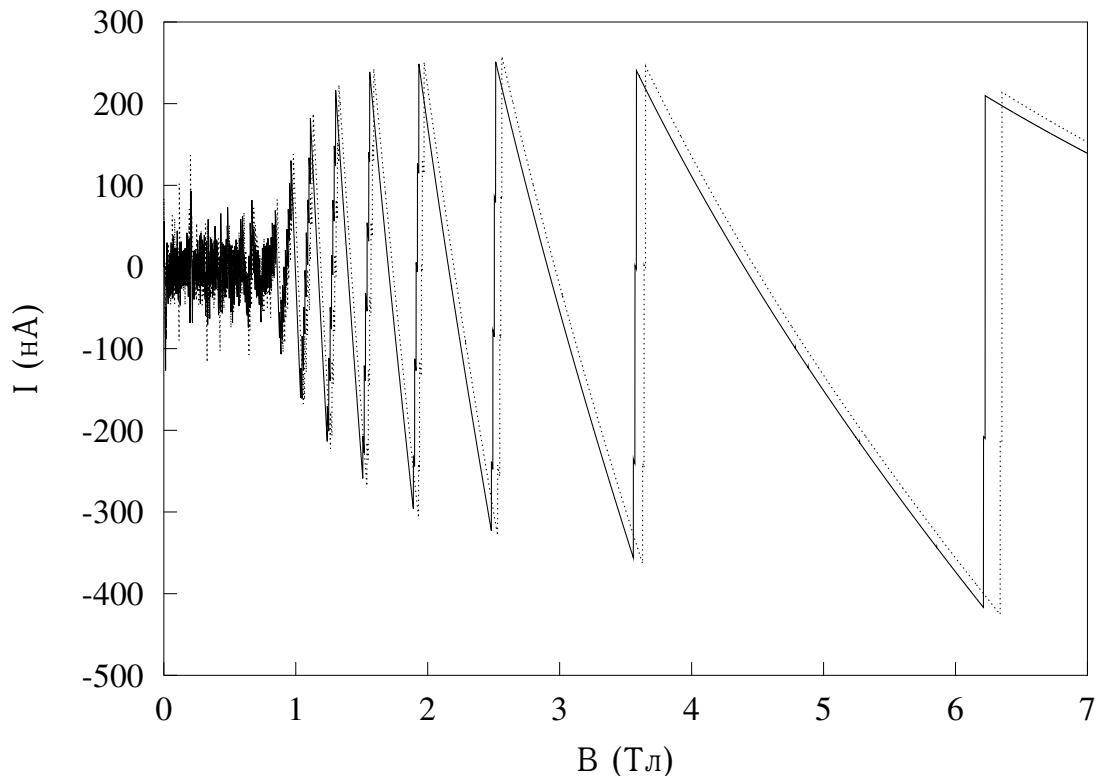


Рис. 5.13. Незатухающий ток в квантовой точке в зависимости от магнитного поля. Сплошной линией изображен незатухающий ток в квантовой точке на поверхности постоянной отрицательной кривизны  $a = 800$  нм. Пунктирной линией изображен незатухающий ток в квантовой точке на плоской поверхности;  $N = 500$ ,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ ,  $T = 0$  К.

осцилляции накладываются осцилляции, обусловленные пересечениями уровней с верхним занятым уровнем, причем амплитуда этих осцилляций существенно уменьшается с увеличением магнитного поля, а при достаточно больших полях стремится к нулю (Рис. 5.14). Как видно из Рис. 5.13 и 5.14, кривизна приводит к уменьшению амплитуд осцилляций типа дГВА и к смещению этих осцилляций в область меньших магнитных полей.

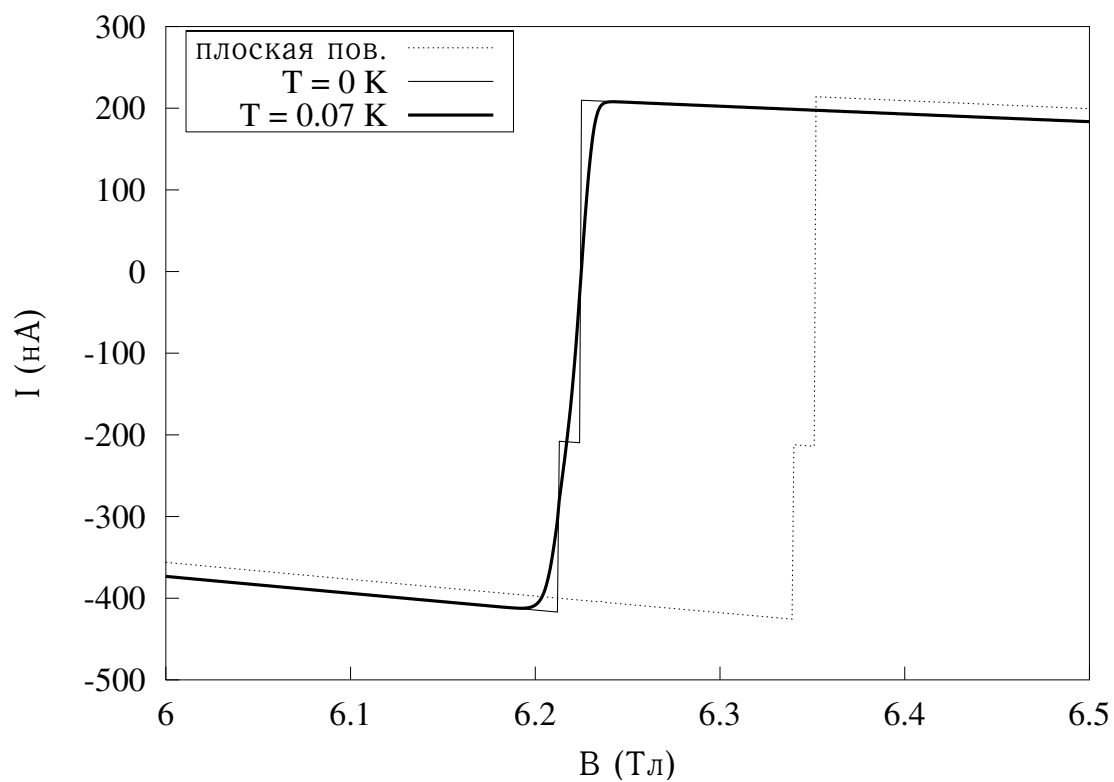


Рис. 5.14. Незатухающий ток в квантовой точке в зависимости от магнитного поля (сильное магнитное поле);  $N = 500$ ,  $a = 800$  нм,  $\omega_0 = 1.5 \times 10^{12}$  с $^{-1}$ ,  $\varphi_{AB} = 0$ .

## Заключение

В диссертации проведены теоретические исследования спектральных и магнитных свойств сфероидальных наноструктур; поглощения электромагнитного излучения сферическими наноструктурами; плотности электронных состояний, квантового эффекта Холла и магнитного момента электронов на поверхности постоянной отрицательной кривизны; электронного энергетического спектра, магнитного момента и незатухающих токов в двумерном квантовом кольце на поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Основные результаты исследований:

1. Получена аналитическая формула для электронного энергетического спектра эллипсоида вращения в магнитном поле. Исследована зависимость спектра от магнитного поля и геометрических параметров системы. Показано, что соотношение между величинами этих поправок изменяет спектральные свойства сфероидальных наноструктур.

2. Найдено выражение для магнитного момента сфероидальных наноструктур удобное для анализа. Подробно изучено поведение магнитного момента от температуры, величины и направления магнитного поля относительно оси симметрии наноструктуры (случай эллипсоида вращения). Исследовано влияние несферичности на магнитный отклик наносистемы в различных предельных случаях. Показано, что в различных предельных случаях поведение магнитного момента системы существенно изменяется. Рассмотрены как случай изолированной наноструктуры, так и случай, когда сфероидальная наноструктура сообщается электронами с резервуаром. Показано, что поведение магнитного отклика эллипсоида от величи-

ны и направления магнитного поля зависит от выбора способа описания термодинамики системы.

3. Выявлено, что поглощение электромагнитного излучения наносферой носит резонансный характер. Исследована зависимость поглощения наносферой от радиуса наносферы, времени релаксации, температуры и числа электронов на наносфере. Рассмотрены случай изолированной сферы и случай сферы, находящейся в термостате. Показано, что выбор способа описания системы существенно сказывается на величине резонансного пика и зависимости его от температуры.

4. Установлено, что однородное магнитное поле приводит к существенному изменению поглощения электромагнитного излучения наносферой. Детально исследованы положение, форма, число резонансных пиков, а также расстояния между пиками поглощения. Рассмотрены различные случаи конфигурации однородного магнитного поля и волнового вектора фотона: конфигурация Фарадея и конфигурация Фойхта. Показано, что в конфигурации Фарадея на кривой поглощения имеются четыре, а в конфигурации Фойхта — шесть резонансных пиков. Установлено, что интенсивности пиков и их положение зависят от магнитного поля, причем эта зависимость различна для пиков, обусловленных различными типами переходов.

5. Исследованы скачки на резонансной кривой поглощения наносферы, обусловленные вырождением газа. Показано, что положения скачков на резонансной кривой в случае изолированной сферы могут изменяться с увеличением температуры. Установлено, что однородное магнитное поле приводит к увеличению числа скачков на кривой поглощения. Показано, что на кривой поглощения имеются скачки двух типов, положения которых совершенно различным образом зависят от частоты электромагнитного излучения и величины магнитного поля.

6. Исследованы плотность электронных состояний, квантовый эффект Холла и магнитный момент двумерного электронного газа, находя-

щегося на поверхности постоянной отрицательной кривизны в магнитном поле. Показано, что кривизна поверхности приводит к изменениям положений порогов и уменьшению величины плато ступеней холловской проводимости. Установлено, что влияние кривизны поверхности на магнитный отклик системы сводится к двум особенностям: существование области полей, в которой магнитный момент имеет только слабую монотонную зависимость от поля; при увеличении поля появляется осцилляционная зависимость, причем осцилляции не являются строго периодическими по обратному полю как в случае плоской поверхности (эффект де Гааза — ван Альфена).

7. Получены явные, аналитические формулы для энергетического спектра, магнитного момента и незатухающих токов в двумерном квантовом кольце на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Исследованы зависимости этих характеристик от магнитного поля, температуры, геометрических параметров кольца и кривизны поверхности. Рассмотрены предельные случаи модели: одномерное кольцо и квантовая точка. Показано, что кривизна поверхности приводит к уменьшению расстояния между максимумами осцилляций магнитного момента типа де Гааза — ван Альфена, к уменьшению амплитуды и периода осцилляций типа Ааронова — Бома. Найдена связь между магнитным моментом и незатухающим током в кольце. Показано, что кривизна поверхности и проникновение магнитного поля в проводящую область кольца приводят к нарушению пропорциональности магнитного момента и незатухающего тока.

## Список литературы

- [1] *von Klitzing K., Dorda G., Pepper M. // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45. — P. 494.*
- [2] *Tsui D., Störmer H., Gossard A. // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 48. — P. 1559.*
- [3] *Aharonov Y., Bohm D. // Phys. Rev. — 1959. — Vol. 115. — P. 485.*
- [4] *Büttiker M. // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Vol. 57. — P. 1761.*
- [5] *Алферов Ж. // УФН. — 2002. — Т. 172. — С. 1067.*
- [6] *Compañó R. // Nanotechnology. — 2001. — Vol. 12. — P. 85.*
- [7] *Prinz V. Y., Seleznev V. A., Samoylov V. A., Gutakovsky A. K. // Microelectronics Engineering. — 1996. — Vol. 30. — P. 439.*
- [8] *Prinz V. Y., Seleznev V. A., Gutakovsky A. K. // Surf. Sci. — 1996. — Vol. 361/362. — P. 886.*
- [9] *Prinz V. Y., Seleznev V. A., Gutakovsky A. K., Chehovskiy A. V., Preobrazhenskii V. V., Putyato M. A., Gavrilova T. A. // Physica E. — 2000. — Vol. 6. — P. 828.*
- [10] *Prinz V. Y., Grützmacher D., Beyer A., David C., Ketterer B., Deccard E. // Proceedings of 9th International Symposium “Nanostructures: Physics and Technology”. — St. Petersburg, Russia: June 18–22 2001. — P. 13.*
- [11] *Ford C. J. B., Washburn S., Büttiker M., Knoedler C. M., Hong J. M. // Phys. Rev. Lett. — 1989. — Vol. 62. — P. 2724.*

- [12] *Leadbeater M. L., Forden C. L., Burke T. M., Burroughes J. H., Grimshaw M. P., Ritchie D. A., Wang L. L., Pepper M. // J. Phys.: Condens. Matter. — 1995. — Vol. 7. — P. L307.*
- [13] *Магарилл Л. И., Романов Д. А., Чаплик А. В. // ЖЭТФ. — 1998. — Т. 113. — С. 1411.*
- [14] *Batista C. L. S., Li D. // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55. — P. 1582.*
- [15] *Melik-Alaverdian V., Bonesteel N. E., Ortiz G. // Physica E. — 1997. — Vol. 1. — P. 138.*
- [16] *Haldane F. D. M., Rezayi E. H. // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 31. — P. 2529.*
- [17] *Iengo R., Li D. // Nucl. Phys. B. — 1994. — Vol. 413. — P. 735.*
- [18] *Alimohammadi M., Sadjadi H. M. // J. Phys. A. — 1996. — Vol. 29. — P. 5551.*
- [19] *Alimohammadi M., Sadjadi H. M. // J. Phys. A. — 1999. — Vol. 32. — P. 4433.*
- [20] *Carey A. L., Hannabuss K. C., Mathai V., McCann P. // Commun. Math. Phys. — 1998. — Vol. 190. — P. 629.*
- [21] *Carey A. L., Hannabuss K., Mathai V. // Lett. Math. Phys. — 1999. — Vol. 47. — P. 215.*
- [22] *Grosche C. // Int. J. Theor. Phys. — 1999. — Vol. 38. — P. 955.*
- [23] *Chakraborty T., Pietiläinen P. // Phys. Rev. B. — 1994. — Vol. 50. — P. 8460.*
- [24] *Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966. — 1063 с.*
- [25] *Středa P. // J. Phys. C. — 1982. — Vol. 15. — P. L717.*



- [26] *Byers N., Yang C. N. // Phys. Rev. Lett.* — 1961. — Vol. 7. — P. 46.
- [27] *Westcott S., Jackson J., Radloff C., Halas N. // Phys. Rev. B.* — 2002. — Vol. 66. — P. 155431.
- [28] *Bulayev D. V., Geyley V. A., Margulis V. A.* Magnetic response of the  $C_{70}$  fullerene structure: an ellipsoid of revolution model // *4th Biennial International Workshop in Russia "Fullerenes and Atomic Clusters"*. — St. Petersburg, Russia: October 4–8 1999. — Abstracts of Invited Lectures and Contributed Papers. — P. 165.
- [29] *Bulaev D. V., Geyley V. A., Margulis V. A.* Electrodynamic response of a nanosphere // *5th Biennial International Workshop in Russia "Fullerenes and Atomic Clusters"*. — St. Petersburg, Russia: July 4–8 2001. — Abstracts of Invited Lectures and Contributed Papers. — P. 301.
- [30] *Булаев Д. В.* Влияние кривизны поверхности на квантовый эффект Холла двумерного электронного газа // *Тезисы докладов IV всероссийской молодежной конференции по физике полупроводников и полупроводниковой опто- и наноэлектронике.* — Санкт-Петербург: 3–6 декабря 2002. — С. 54.
- [31] *Булаев Д. В.* Электронные состояния в двумерном квантовом кольце на плоскости Лобачевского // *Международная зимняя школа по физике полупроводников.* — С.-Петербург: Февраль 28 - Март 3 2003. — Научные сообщения молодых ученых. — С. 4–5.
- [32] *Булаев Д. В.* Магнитный отклик двумерного квантового кольца на плоскости Лобачевского // *Тезисы докладов XXXIII всероссийского совещания по физике низких температур.* — Екатеринбург: 17–20 июня 2003. — С. 284–285.
- [33] *Bulaev D.* Effect of the surface curvature on the magnetic response of 2D quantum rings // *International Conference on Theoretical Trends*

- in Low-Dimensional Magnetism*. — Florence, Italy: 23–25 July 2003. — Abstracts. — P. 31.
- [34] *Bulaev D. V., Geyley V. A., Margulis V. A.* Magnetic response for an ellipsoid of revolution in a magnetic field // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 62, no. 17. — Pp. 11517–11526.
- [35] *Булаев Д. В., Гейлер В. А., Маргулис В. А.* Электродинамический отклик наносферы // *ФТТ*. — 2002. — Т. 44, № 3. — С. 471–472.
- [36] *Булаев Д. В., Маргулис В. А.* Поглощение электромагнитного излучения электронами наносферы // *ФТТ*. — 2002. — Т. 44, № 9. — С. 1557–1567.
- [37] *Булаев Д. В., Маргулис В. А.* Электродинамический отклик наносферы, помещенной в магнитное поле // *ФТТ*. — 2003. — Т. 45, № 2. — С. 349–358.
- [38] *Bulaev D. V., Geyley V. A., Margulis V. A.* Quantum Hall effect on the Lobachevsky plane // *Physica B*. — 2003. — Vol. 337, no. 1–4. — Pp. 180–185.
- [39] *Маргулис В. А., Булаев Д. В.* Спектр и магнитный момент фуллеренов // *XXVII Огаревские чтения. Материалы научной конференции Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева*. — Саранск: 15–19 декабря 1998. — С. 109–110.
- [40] *Костров О. Г., Булаев Д. В.* Спектр фуллерена  $C_{60}$  в магнитном поле // *Тезисы докладов II международной научно-технической конференции “Проблемы и прикладные вопросы физики”*. — Саранск: 16–19 июня 1999. — С. 139.
- [41] *Булаев Д. В., Маргулис В. А.* Поглощение электромагнитного излучения наносферой в магнитном поле // *Труды международной конференции “Оптика, оптоэлектроника и технологии”*. — Ульяновск: 25–29 июня 2001. — С. 105.

- [42] Булаев Д. В., Гейлер В. А., Маргулис В. А. Плотность электронных состояний и квантовый эффект Холла на плоскости Лобачевского // *Труды двенадцатой межвузовской конференции “Математическое моделирование и краевые задачи”*. — Самара: 29–31 мая 2002. — С. 15–17.
- [43] Булаев Д. В. Магнитный момент электронов на плоскости Лобачевского // *Сборник трудов межрегиональной научной школы для студентов и аспирантов “Материалы нано-, микро- и оптоэлектроники: физические свойства и применение”*. — Саранск: 11–13 ноября 2002. — С. 45.
- [44] Zhou H. S., Honma I., Komiyama H., Haus J. W. // *Phys. Rev. B*. — 1994. — Vol. 50. — P. 12052.
- [45] Averitt R. D., Sarkar D., Halas N. J. // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 78. — P. 4217.
- [46] Averitt R. D., Westcott S. L., Halas N. J. // *Phys. Rev. B*. — 1998. — Vol. 58. — P. R10203.
- [47] Diao J. J., Chen G. D. // *J. Phys. D*. — 2001. — Vol. 34. — P. L79.
- [48] Jackson J., Halas N. // *J. Phys. Chem. B*. — 2001. — Vol. 105. — P. 2743.
- [49] Miguez H., Blanco A., Meseguer F., López C., Yates H. M., Pemble M. E., Fornés V., Mijsud A. // *Phys. Rev. B*. — 1999. — Vol. 59. — P. 1563.
- [50] Yannopoulos V., Modinos A., Stefanou N. // *Phys. Rev. B*. — 1999. — Vol. 60. — P. 5359.
- [51] Ohtaka K., Suda Y., Nagano S., Ueta T., Imada A., Koda T., Bae J. S., Mizuno K., Yano S., Segawa Y. // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 61. — P. 5267.

- [52] *Cheung H. F., Gefen Y., Riedel E. K., Shin W. H. // Phys. Rev. B. — 1988. — Vol. 37. — P. 6050.*
- [53] *Meir Y., Entin-Wohlman O., Gefen Y. // Phys. Rev. B. — 1990. — Vol. 42. — P. 8531.*
- [54] *Гейлер В. А., Маргулис В. А., Чудаев И. В. // ЖЭТФ. — 1996. — Т. 109. — С. 762.*
- [55] *Гейлер В. А., Маргулис В. А., Томилин О. Б. // Письма в ЖЭТФ. — 1996. — Т. 63. — С. 549.*
- [56] *Geyler V. A., Margulis V. A. // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55. — P. 2543.*
- [57] *Гейлер В. А., Маргулис В. А., Шорохов А. В. // ЖЭТФ. — 1999. — Т. 115. — С. 1450.*
- [58] *Магарилл Л. И., Романов Д. А., Чаплик А. В. // Письма в ЖЭТФ. — 1996. — Т. 64. — С. 421.*
- [59] *Tanaka K., Creagh S. C., Brack M. // Phys. Rev. B. — 1996. — Vol. 53. — P. 16050.*
- [60] *Filina L. I., Geyler V. A., Margulis V. A., Tomilin O. B. // Phys. Lett. A. — 1998. — Vol. 244. — P. 295.*
- [61] *Магарилл Л. И., Чаплик А. В. // ЖЭТФ. — 1999. — Т. 115. — С. 1478.*
- [62] *Lin M. F., Shung K. W. K. // Phys. Rev. B. — 1995. — Vol. 52. — P. 8423.*
- [63] *Chaplik A. V., Magarill L. I., Romanov D. A. // Physica B. — 1998. — Vol. 249. — P. 377.*
- [64] *Aoki H., Suezawa H. // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 46. — P. R1163.*

- [65] *Kim J. H., Vagner I. D., Sundaram B. // Phys. Rev. B. — 1992. — Vol. 46. — P. 9501.*
- [66] *Aristov D. N. // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 59. — P. 6368.*
- [67] *Aristov D. N. // Письма в ЖЭТФ. — 1999. — Т. 70. — С. 405.*
- [68] *Murthy G. N., Auerbach A. // Phys. Rev. B. — 1992. — Vol. 46. — P. 331.*
- [69] *Wójs A., Quinn J. J. // Physica E. — 1998. — Vol. 3. — P. 181.*
- [70] *Chakravarty S., Kivelson S. // Europhys. Lett. — 1991. — Vol. 16. — P. 751.*
- [71] *Chakravarty S., Gelfand M. P., Kivelson S. // Science. — 1991. — Vol. 254. — P. 970.*
- [72] *White S., Chakravarty S., Gelfand M. P., Kivelson S. // Phys. Rev. B. — 1992. — Vol. 45. — P. 5062.*
- [73] *Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. — М.: Наука, 1976. — 319 с.*
- [74] *Malits P., Vagner I. D. // J. Phys. A. — 1999. — Vol. 32. — P. 1507.*
- [75] *Демиховский В. Я., Перов А. А. // ЖЭТФ. — 1998. — Т. 114. — С. 1795.*
- [76] *Brey L., Johnson N. F., Halperin B. I. // Phys. Rev. B. — 1989. — Vol. 40. — P. 10647.*
- [77] *Tempere J., Silvera I., Devreese J. // Phys. Rev. B. — 2002. — Vol. 65. — P. 195418.*
- [78] *Frölich H. // Adv. in Phys. — 1954. — Vol. 3. — P. 325.*
- [79] *Басс Ф. Г., Левинсон И. Б. // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 49. — С. 914.*

- [80] *Murray C. B., Norris D. J., Bawendi M. G. // J. Am. Chem. Soc. — 1993. — Vol. 11. — P. 8706.*
- [81] *Salvarezza R. C., Vázquez L., Miguez H., Mayoral R., López C., Meseguer F. // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Vol. 77. — P. 4572.*
- [82] *Vlasov Y. A., Astratov V. N., Karimov O. Z., Kaplyanskii A. A., Bogomolov V. N., Prokofiev A. V. // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 55. — P. R13357.*
- [83] *Xia J. B., Li J. // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 60. — P. 11540.*
- [84] *Martinos S. S. // Phys. Rev. B. — 1989. — Vol. 39. — P. 1363.*
- [85] *Ruppin R. // Phys. Rev. B. — 1992. — Vol. 45. — P. 11209.*
- [86] *Смирнов Б. М., Вайделе Х. // ЖЭТФ. — 1999. — Т. 116. — С. 1903.*
- [87] *Mie G. // Ann. Phys. (Leipzig). — 1908. — Vol. 25. — P. 377.*
- [88] *Albe V., Jouanin C., Bertho D. // Phys. Rev. B. — 1998. — Vol. 58. — P. 4713.*
- [89] *Kalyaniwalla N., Haus J. W., Inguva R., Birnboim M. H. // Phys. Rev. A. — 1990. — Vol. 42. — P. 5613.*
- [90] *Fu L., Resca L. // Phys. Rev. B. — 1997. — Vol. 56. — P. 10963.*
- [91] *Rojas R., Claro F., Fuchs R. // Phys. Rev. B. — 1988. — Vol. 37. — P. 6799.*
- [92] *Foden C. L., Leadbeater M. L., Peper M. // Phys. Rev. B. — 1995. — Vol. 52. — P. 8646.*
- [93] *Entin M. V., Magarill L. I. // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 64, no. 085330.*
- [94] *da Costa R. C. T. // Phys. Rev. A. — 1981. — Vol. 23. — P. 1982.*

- [95] *Albeverio S. A., Exner P., Geysler V. A. // Lett. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 55. — P. 9.
- [96] *Mostafazadeh A. // Phys. Rev. A.* — 1996. — Vol. 54. — P. 1165.
- [97] *Comtet A. // Ann. Phys.* — 1987. — Vol. 173. — P. 185.
- [98] *Kuperin Y. A., Romanov R. V., Rudin H. E. // Lett. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 31. — P. 271.
- [99] *Cheng K. // J. Math. Phys.* — 1972. — Vol. 13. — P. 1723.
- [100] *Gutzwiller M. C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics.* — New York: Springer, 1990.
- [101] *Mostafazadeh A. // J. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 35. — P. 1095.
- [102] *Глинский Г. // ЖТФ.* — 2000. — Т. 70. — С. 10.
- [103] *Демиховский В. Я., Вугальтер Г. А. Физика квантовых низкоразмерных структур.* — М.: Логос, 2000. — 248 с.
- [104] *Lee D. H., Wang Z. // Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76. — P. 4014.
- [105] *Blanter Y. M., Livanov D. V. // Phys. Rev. B.* — 1994. — Vol. 49. — P. 2955.
- [106] *Crépieux A., Bruno P. // Phys. Rev. B.* — 2001. — Vol. 64, no. 014416.
- [107] *Cavalkanti R. M., de Carvalho C. A. A. // J. Phys. A.* — 1998. — Vol. 31. — P. 2391.
- [108] *Giacconi P., Soldati R. // J. Phys. A.* — 2000. — Vol. 33. — P. 5193.
- [109] *Huckestein B. // Phys. Rev. Lett.* — 2000. — Vol. 84. — P. 3141.
- [110] *Boisen A., Boggild P., Kristensen A., Lindelof P. E. // Phys. Rev. B.* — 1994. — Vol. 50. — P. 1957.

- [111] Брюнинг Й., Гейлер В. А. // *ТМФ*. — 1999. — Т. 115. — С. 368.
- [112] Grosche C. // *J. Phys. A*. — 1992. — Vol. 25. — P. 4573.
- [113] Stockmann H.-J. Quantum chaos: An introduction. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999. — 368 pp.
- [114] Landau L. // *Z. Phys.* — 1930. — Vol. 64. — P. 629.
- [115] Haas W., Alphen P. // *Leiden Commun.* — 1930. — Vol. A212. — P. 215.
- [116] Лифшиц И., Косевич А. // *ЖЭТФ*. — 1955. — Т. 29. — С. 730.
- [117] Абрикосов А. Основы теории металлов. — М.: Наука, 1987. — 520 с.
- [118] Peierls R. // *Phys. Z.* — 1933. — Vol. 81. — P. 186.
- [119] Harris J., Knobel R., Maranovski K., Gossard A., Samath N., Awschalom D. // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 4644.
- [120] Jauregui K., Marchenko V. I., Vagner I. D. // *Phys. Rev. B*. — 1990. — Vol. 41. — P. 12922.
- [121] Зегря Г. // *ФТП*. — 1999. — Т. 33. — С. 1144.
- [122] Bogachev E. N., Landman U. // *Phys. Rev. B*. — 1995. — Vol. 52. — P. 14067.
- [123] Keyser U. F., Borck S., Haug R. J., Bichler M., Abstreiter G., Wegscheider W. // *Semicond. Sci. Technol.* — 2002. — Vol. 17. — P. L22.
- [124] Pedersen S., Hansen A. E., Kristensen A., Sorensen C. B., Lindelof P. E. // *Phys. Rev. B*. — 2000. — Vol. 61. — P. 5457.
- [125] Bykov A. A., Olshanetsky E. B., Litvin L. V., Moshegov N. T., Toporov A. I., Gusev G. M. // *Physica E*. — 1998. — Vol. 2. — P. 408.



- [126] *Halperin B. I. // Phys. Rev. B. — 1982. — Vol. 25. — P. 2185.*
- [127] *Tan W. C., Inkson J. C. // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 60. — P. 5626.*
- [128] *Viefers S., Deo P. S., Reimann S. M., Manninen M., Koskinen M. // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 62. — P. 10668.*
- [129] *Cheung H. F., Riedel E. K., Gefen Y. // Phys. Rev. Lett. — 1989. — Vol. 62. — P. 587.*
- [130] *Levy L. P., Dolan G., Dunsmuir J., Bouchiat H. // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 64. — P. 2074.*
- [131] *Maily D., Chapelier C., Benoit A. // Phys. Rev. Lett. — 1993. — Vol. 70. — P. 2020.*
- [132] *Nagoshi Y., Takagi S. // J. Phys. A. — 1991. — Vol. 24. — P. 4093.*
- [133] *Berry M. V., Keating J. P. // J. Phys. A. — 1994. — Vol. 27. — P. 6167.*
- [134] *Kawabata S. // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 60. — P. R8457.*
- [135] *Nitta J., Meijer F., Narita Y., Takayanagi H. // Physica E. — 2000. — Vol. 6. — P. 318.*
- [136] *Loss D., Goldbart P., Balatsky A. V. // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 65. — P. 1655.*
- [137] *Büttiker M., Imry Y., Landauer R. // Phys. Lett. A. — 1983. — Vol. 96. — P. 365.*
- [138] *Büttiker M., Imry Y., Azbel M. Y. // Phys. Rev. B. — 1984. — Vol. 30. — P. 1982.*
- [139] *Büttiker M. // Phys. Rev. B. — 1985. — Vol. 32. — P. 1846.*

- [140] *Lorke A., Luyken R. J., Govorov A. O., Kotthaus J. P., Garcia J. M., Petroff P. M. // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84. — P. 2223.*
- [141] *van Oudenaarden A., Devoret M. H., Nazarov Y. V., Mooij J. E. // Nature. — 1998. — Vol. 391. — P. 768.*
- [142] *Chandrasekhar V., Webb R. A., Brady M. J., Ketchen M. B., Gallagher W. J., Kleinsasser A. // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 67. — P. 3578.*
- [143] *Kobayashi K., Aikawa H., Katsumoto S., Iye Y. // J. Phys. Soc. Jap. — 2002. — Vol. 71. — P. 2094.*
- [144] *Tan W. C., Inkson J. C. // Semicond. Sci. Technol. — 1996. — Vol. 11. — P. 1635.*
- [145] *Tomita I., Suzuki A. // Phys. Rev. B. — 1996. — Vol. 53. — P. 9536.*
- [146] *Margulis V. A., Shorokhov A. V., Trushin M. P. // Physica E. — 2001. — Vol. 10. — P. 518.*
- [147] *Klama S. // J. Phys.: Condens Matter. — 1993. — Vol. 5. — P. 5609.*
- [148] *Barticevic Z., Pacheco M., Latgé A. // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 62. — P. 6963.*
- [149] *Planelles J., Jaskólski W., Aliaga J. I. // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 65, no. 033306.*
- [150] *Puente A., Serra L. // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 63, no. 125334.*
- [151] *Lin J. C., Guo G. Y. // Phys. Rev. B. — 2001. — Vol. 65, no. 035304.*
- [152] *Мессиа А. Квантовая механика. — М.: Наука, 1979. — 284 с.*
- [153] *Шенберг Д. Магнитные осцилляции в металлах. — М.: Мир, 1986. — 284 с.*

- [154] *Квасников И. А.* Термодинамика и статистическая физика. Теория равновесных систем. — М.: МГУ, 1991. — 793 с.
- [155] *Bloch F.* // *Phys. Rev. B.* — 1970. — Vol. 2. — P. 109.

## Приложение А

Рассмотрим оператор  $H_m$  заданный уравнениями (5.3)–(5.5),  $D(H_m) = L^2(1, \infty)$ . Этот оператор является симметрическим.

Легко показать, что оператор  $H_m - \varepsilon$  имеет три регулярные особенности в точках 0, 1 и  $\infty$ . Показатели этого оператора в этих точках равны соответственно  $\pm\alpha_m$ ,  $\pm\beta_m$ ,  $1/2 \pm \gamma(\varepsilon)$  [24], где

$$\alpha_m = \frac{\omega_m}{\Omega}, \quad (\text{A.1})$$

$$\beta_m = \frac{M}{2}, \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma(\varepsilon) = \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right)^2 [1 - (r_0/2a)^2]^2 - \varepsilon}, \quad (\text{A.3})$$

где  $\varepsilon = 2m^*a^2E/\hbar^2$  и  $\Omega = \hbar/m^*a^2$ .

В зависимости от величины параметра  $\beta_m$  могут реализовываться два случая.

**Случай 1.**  $\beta_m \geq 1/2$ . Необходимо отметить, что для двумерного квантового кольца  $m^*\omega_0r_0^2/2\hbar \gg 1$ . Поэтому, исходя из (A.2), условие  $\beta_m \geq 1/2$  выполнено. Можно показать, что в этом случае индексы дефекта оператора  $H_m$  равны (0,0), следовательно, существует только единственное самосопряженное расширение оператора в  $L^2(1, \infty)$ . Найдем собственные функции и собственные значения оператора  $H_m$  в этом случае.

Пусть  $\gamma = i\rho$  ( $\rho \in \mathbb{R}$ ). Тогда  $\varepsilon > (\omega_c/\Omega)^2 + (\omega_0/\Omega)^2[1 - (r_0/2a)^2]^2$ , в этом случае  $(H_m - \varepsilon)f_m(x) = 0$  имеет два линейно независимых решения, которые ведут себя на бесконечности как  $x^{-1/2 \pm i\rho}$ . Ясно, что ни одно из этих решений не принадлежит  $L^2(1, \infty)$ . Следовательно дискретный спектр оператора  $H_m$  полностью лежит в области  $\varepsilon < (\omega_c/\Omega)^2 + (\omega_0/\Omega)^2[1 - (r_0/2a)^2]^2$ . В этой области существуют два линейно независимых решения, которые ведут себя на бесконечности как  $x^{-1/2 \pm \gamma}$ . Одно из этих решений не лежит в  $L^2(1, \infty)$ . Таким образом, имеется одномерное подпространство решений с интегрируемым квадратом на бесконечности.

Найдем сначала дискретный спектр оператора  $H_m$ . Для того, чтобы  $\varepsilon$  было собственным значением оператора  $H_m$ , необходимо и достаточно, чтобы решение  $f_m(x)$  уравнения  $(H_m - \varepsilon)f_m(x) = 0$  имеющее вид вблизи точки  $x = 1$ :  $(x - 1)^{\beta_m}(1 + \dots)$  на бесконечности вело себя как  $x^{-1/2-\gamma}(1 + \dots)$  (при положительном  $\gamma$ ) [24]. Таким образом, решение можно искать в виде

$$(x - 1)^{\beta_m} x^{-1/2-\gamma-\beta_m} \omega(x).$$

Так как  $H_m - \varepsilon$  имеет регулярную особенность в бесконечности, то  $(x - 1)^{\beta_m} x^{-1/2-\gamma-\beta_m} \omega$  имеет вид  $O(x^{+N})$  в бесконечности для некоторого достаточно большого  $N$ . Отсюда следует, что  $(x - 1)^{\beta_m} x^{-1/2-\gamma-\beta_m} \omega(x)$  — полином, то есть имеет вид [24]

$$(x - 1)^{\beta_m} x^{-1/2-\gamma-\beta_m} P(x),$$

где  $P(x)$  — полином. Таким образом, сделаем замену переменной  $t = 1/x$ , и будем искать решение полученного уравнения в виде  $f_m(1/t) = t^{1/2+\gamma}(1-t)^{\beta_m} \omega(t)$ . Тогда  $(H_m - \varepsilon)f_m(x) = 0$  сводится к следующему уравнению:

$$t(1-t)\omega'' + [1 + 2\gamma - (2\gamma + 2\beta_m + 2)t]\omega' + [\alpha_m^2 - (\beta_m + \gamma + 1/2)^2]\omega = 0. \quad (\text{A.4})$$

Поскольку это гипергеометрическое уравнение [24], его решением будет гипергеометрическая функция  $\omega(t) = F(-\alpha_m + \beta_m + \gamma + 1/2, \alpha_m + \beta_m + \gamma + 1/2; 1 + 2\gamma; t)$ . Поэтому  $\varepsilon$  является собственным значением тогда и только тогда, когда  $F$  — полином, то есть тогда и только тогда, когда гипергеометрический ряд превращается в конечную сумму. Из свойств гипергеометрической функции следует, что это возможно, только когда  $-\alpha_m + \beta_m + \gamma + 1/2$  или  $\alpha_m + \beta_m + \gamma + 1/2$  целое неположительное число. Так как  $\alpha_m + \beta_m + \gamma + 1/2 > 0$  ( $\alpha_m, \beta_m, \gamma > 0$ ), то собственные значения оператора  $H_m$  определяются уравнением

$$-\alpha_m + \beta_m + \gamma(\varepsilon) + 1/2 = -n, \quad (\text{A.5})$$

где  $n$  натуральное число. Необходимо отметить, что так как точечный спектр оператора  $H_m$  ограничен сверху:  $\varepsilon < (\omega_c/\Omega)^2 + (\omega_0/\Omega)^2 [1 - (r_0/2a)^2]^2$ ,

то мы имеем только конечное число дискретных уровней определяемых двойным неравенством  $0 \leq n < \alpha_m - \beta_m - 1/2$ .

Выражая  $E_{nm}$  из (A.5), получим набор дискретных собственных значений оператора  $H_m$ :

$$E_{nm} = \hbar\omega_m \left( n + \frac{1}{2} + \frac{M}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_c}{2}(m + \varphi_{AB}) - \frac{m^*\omega_0^2 r_0^2}{4} - \frac{\hbar^2}{2m^*a^2} \left[ \frac{1}{2}(m + \varphi_{AB})^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( n + \frac{1}{2} \right) M \right], \quad (\text{A.6})$$

где

$$m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} : 0 \leq n < m^*\omega_m a^2/\hbar - M/2 - 1/2. \quad (\text{A.7})$$

Соответствующие ортонормированные собственные функции оператора  $H_m$  имеют вид

$$f_{nm}(x) = C_{nm}(x-1)^{\beta_m} x^{n-\alpha_m} F(-n, -n+2\alpha_m; 2\alpha_m-2\beta_m-2n; 1/x). \quad (\text{A.8})$$

Используя свойства гипергеометрических функций [24], можно найти явный вид нормировочных множителей:

$$|C_{nm}|^2 = 2^{2\alpha_m-2\beta_m-2n-2} \frac{\Gamma(2\alpha_m-n)\Gamma(2\alpha_m-2\beta_m-n)(2\alpha_m-2\beta_m-2n-1)}{a^2[\Gamma(2\alpha_m-2\beta_m-2n)]^2\Gamma(1+2\beta_m+n)n!}.$$

Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

Теперь исследуем непрерывный спектр оператора  $H_m$ . Концевые точки  $x=1$ ,  $x=\infty$  можно рассматривать отдельно [24].

Рассмотрим оператор  $H' = H_m$ ,  $D(H') = L^2(0, c)$ ,  $c < \infty$ . Этот оператор имеет два граничных значения в точке  $x=1$  при  $0 \leq \beta_m < 1/2$ , полуограничен снизу и возрастает с ростом  $\beta_m$ . Таким образом, вследствие известных теорем [24]  $\sigma_e(H') = \emptyset$ .

Рассмотрим оператор  $H'' = H_m$ ,  $D(H'') = L^2(c, \infty)$ . Можно показать [24], что непрерывный спектр оператора  $H''$

$$\sigma_e(H'') = \{ \varepsilon | \varepsilon \geq (\omega_c/\Omega)^2 + (\omega_0/\Omega)^2 [1 - (r_0/2a)^2]^2 \}.$$

Следовательно,

$$\sigma_e(H_m) = \sigma_e(H'') = \{ \varepsilon | \varepsilon \geq (\omega_c/\Omega)^2 + (\omega_0/\Omega)^2 [1 - (r_0/2a)^2]^2 \}. \quad (\text{A.9})$$

После громоздких преобразований получим выражение для нормированных собственных функций  $H_m$ , соответствующих непрерывному спектру  $f_{\nu m}(x) = C_{\nu m} x^{\alpha_m} (x-1)^{\beta_m} F(\alpha_m + \beta_m + i\nu + 1/2, \alpha_m + \beta_m - i\nu + 1/2; 1 + 2\beta; 1-x)$ ,

где

$$C_{\nu m} = \frac{(\operatorname{sh} 2\pi\nu)^{1/2}}{2\pi a \Gamma(1 + 2\beta_m)} |\Gamma(-\alpha_m + \beta_m - i\nu + 1/2) \Gamma(\alpha_m + \beta_m - i\nu + 1/2)|.$$

Исходя из (А.3) и (А.9) получим, что непрерывный спектр оператора  $H_m$  имеет вид

$$E_\nu = \frac{m^* \omega_c^2 a^2}{2} + \frac{m^* \omega_0^2 a^2}{2} [1 - (r_0/2a)^2]^2 + \frac{\hbar^2}{2m^* a^2} \nu^2, \quad \nu \in \mathbb{R}. \quad (\text{А.10})$$

Как следует из (А.10), нижняя граница непрерывного спектра квадратично зависит от величины однородного магнитного поля и не зависит от потока Ааронова — Бома. Ниже непрерывного спектра лежит точечный спектр гамильтониана рассматриваемой системы, причем, исходя из (А.7), количество дискретных уровней конечно. С увеличением магнитного поля возникают новые дискретные уровни электронов, которые “отщепляются” от непрерывного спектра.

Резюмируем вышесказанное: спектр оператора  $H_m$  состоит из двух частей: дискретного спектра в интервале  $(0, E_0)$  и непрерывного спектра в интервале  $[E_0, \infty)$ , где  $E_0 = m^* \omega_c^2 a^2 / 2 + m^* \omega_0^2 a^2 [1 - (r_0/2a)^2]^2 / 2$  — нижняя граница непрерывного спектра. Дискретный спектр оператора  $H_m$  состоит из конечного числа уровней (формула (А.6)), а непрерывный спектр оператора  $H_m$  задается формулой (А.10)

**Случай 2.**  $0 \leq \beta_m < 1/2$ . Согласно (А.2), это неравенство выполняется для состояний с  $m + \varphi_{AB} \approx 0$  в достаточно широком квантовом кольце или в квантовой точке ( $m^* \omega_0 r_0^2 / 2\hbar \simeq 0$ ). В этом случае индексы дефекта оператора  $H_m$  равны (1,1). Описать самосопряженные расширения можно в рамках так называемой теории граничных значений. Чтобы получить самосопряженный оператор, необходимо задать одно граничное значение. В результате несложных вычислений можно показать, что самосопряженное расширение  $H_m^\infty$  оператора  $H_m$  характеризуется условиями:

$f_m(x) \in D(H_m^\infty)$  тогда и только тогда, когда  $f_m(x) \in D(H_m^*)$  и

$$\lim_{x \downarrow 1} (x-1)^{\beta_m} f_m(x) = 0 \quad \text{при } 0 < \beta_m < 1/2,$$

$$\lim_{x \downarrow 1} (x-1) f_m'(x) = 0 \quad \text{при } \beta_m = 0.$$

Эти условия однозначно определяют самосопряженное расширение  $H_m$ .